76

STJEPAN MINTAKOVIĆ

ZBIRKA ZADATAKA IZ TRIGONOMETRIJE

S. MINTAKOVIĆ • ZBIRKA ZADATAKA IZ TRIGONOMETRIJE

Prof. STJEPAN MINTAKOVIĆ

Zbirka zadataka iz trigonometrije

sa uputama i rezultatima

XII IZDANJE

»SVJETLOST«
OOUR ZAVOD ZA UDŽBENIKE I NASTAVNA SREDSTVA
SARAJEVO, 1981.

Recenzenti:
dr Mahmut Bajraktarević, profesor
Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu i
Fadila Arnautović, prosvjetni savjetnik
Zavoda za unapredivanje školstva SRBiH

Odgovorni urednik:
Ramiz Džananović

Naslovna strana:
Hamid Lukovac

Tehnički urednik:
Divna Močević

Tiraž: 5000 primjeraka

Izdaje:
»Svjetlost«
OOUR Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Sarajevo

Za izdavača:
Savo Zirojević

Štampa:
IRO »Veselin Masleša« Sarajevo.
OOUR Štamparija Mostar

Za štampariju:
Rudo Bandić

PREDGOVOR

Zadaci u ovoj Zbirci podijeljeni su u šesnaest velikih poglavlja s obzirom na vrste problema koje obrađuju. Podjela je izvršena držeći se strogo principa sistematičnosti i logičkog poretka. Na taj način se ovom Zbirkom mogu podjednako koristiti kako redovni učenici škola srednjeg stupnja tako i ostali koji iz bilo kojih razloga žele da se upoznaju se ovim dijelom matematike.

Princip sistematičnosti je sproveden i kroz svako pojedino poglavlje od kojih svako sadrži obilan broj zadataka od najjednostavnijih do najsloženijih. Pri tome sam vodio računa o principu postupnosti idući od jednostavnijeg ka težem i složenijem, od konkretnog ka opštem. U početku svakog poglavlja dao sam jednostavnije zadatke kojima je cilj utvrđivanje i razjašnjavanje pojmova i relacija prelazeći postepeno na zadatke u kojima se zahtijeva veći napor, a cilj im je ne samo utvrđivanje i uočavanje veza između pojedinih trigonometrijskih funkcija nego i razvijanje strogog matematičkog mišljenja

. Jedan od najvažnijih pojmova u matematici je pojam funkcije i funkcionalne zavisnosti. Među elementarnim funkcijama trigonometrijske funkcije pružaju najljepši primjer za upoznavanje sa nekim osnovnim osobinama funkcija kao što su neprekidnost, periodičnost, simetričnost i druge. U ovoj knjizi dao sam veliki broj zadataka u kojima se dovoljno ilustruje većina ovih osobina tako da će svako ko se bude koristio ovom Zbirkom steći sigurno znanje o ovim funkcijama.

U prikazivanju funkcionalne zavisnosti u matematici najčešće se služimo tabelarnom, grafičkom i analitičkom metodom. Svaka od ovih metoda ima svoje određeno mjesto, značenje i važnost. Trigonometrija je upravo oblast u kojoj mogu doći do punog izražaja sve tri metode. U Zbirku sam unio, mislim, dovoljno zadataka u kojima dolaze do izražaja ove metode.

Daljnja vrlo važna osobina trigonometrije je i ta što ona daje podjednako velike mogućnosti kako za numeričke zadatke koji su od velike važnosti za praktičare, tako i za suptilnije matematičke diskusije i analize kojima je cilj razvijanje sposobnosti uočavanja matematičkih zavisnosti između pojedinih veličina. Trudio sam se da i u ovom pogledu Zbirka bude na visini. Ona raspolaže velikim brojem čisto numeričkih zadataka koji također sa svoje strane doprinose boljem i konkretnijem upoznavanju materije. S druge strane, veliki broj zadataka sa promjenljivim parametrima omogućava upoznavanje metoda matematičke diskusije .

analize. Ovi zadaci ne smiju se zanemariti pri obradi materijala ove Zbirke. Takvi zadaci navode i navikavaju na kritičnije posmatranje, na utvrđivanje uslova pod kojima su rješenja moguća odnosno nemoguća, na utvrđivanje broja rješenja, zavisnost broja rješenja od vrijednosti promjenljivih parametara itd. Nastojao sam da i u ovom pogledu Zbirka zadovoljava.

Zbirka sadrži i priličan broj zadataka kojima je cilj primjena trigonometrije na ostale grane matematike, na geodeziju i fiziku. Ovi zadaci, u neku ruku, objedinjuju i povezuju pojedine dijelove trigonometrije sa ostalim dijelovima matematike kao i sa drugim naukama.

Broj zadataka u Zbirci je velik. Zadaci su većinom grupisani tako da po četiri, a ponekad i više zadataka iste vrste i težine, čine jednu grupu. Cilj je takvog grupisanja da bi se dalo dovoljno zadataka za obradu u školi ali isto tako i za samostalno rješavanje sličnih zadataka u vanškolskom radu. Za većinu zadataka date su na kraju knjige upute i rezultati, a znatan je broj zadataka za koje su data i potpuna rješenja. To su obično teži i duži zadaci koji zahtijevaju ne samo veći intelektualni napor nego i veće poznavanje materije iz drugih grana matematike. Uputa je data uvijek bar za jedan zadatak iz svake grupe. S obzirom da su u grupi srodni zadaci, ovo je dovoljno, jer se analogno, sa malo razmišljanja lako mogu riješiti i ostali zadaci iste grupe. Međutim, postoji u Zbirci priličan broj grupa gdje su date upute i rješenja djelomično ili potpuno za više, a ponekad i za sve zadatke jedne grupe. U uputama sam ukazivao na ključne momente rješavanja zadataka, koje čitalac ne bi mogao samostalno riješiti. Nastojao sam da upute ipak odmjeravam tako da se od čitaoca, i pored učinjene olakšice, zahtijeva i dosta samostalnosti.

Na ovom mjestu je potrebno skrenuti pažnju učenicima i nastavnicima na potrebu paralelnog rada sa udžbenikom trigonometrije i Zbirkom zadataka, kako se izučavanje trigonometrije ne bi svelo samo na mehaničko rješavanje zadataka. U svakidašnjoj praksi nastavnik je dužan da nauči učenika i to kako da se služi udžbenikom. Isto tako treba da uputi učenike kako da se služe i Zbirkom.

Učenicima se preporučuje da što samostalnije rješavaju zadatke iz Zbirke i da iza toga upoređuju dobivene rezultate i postupke sa onima u knjizi. Na taj način će se učenik postepeno osposobljavati za samostalno rješavanje matematičkih zadataka i otkrivati i usavršavati metode za njihovo rješavanje.

U knjizi ima veliki broj slika i grafikona. Iz tehničkih razloga nije to moguće dati za svaki zadatak. Čitalac treba da se navikava i usavršava u samostalnom ilustriranju na čemu se često i započinje rješavanje pojedinih zadataka.

Na kraju knjige dao sam trigonometrijske obrasce (formule u vidu jedne rekapitulacije u kojoj su date, uglavnom, sve važnije veze između trigonometrijskih funkcija i elemenata trougla). Tu će se naći sve formule na koje se u knjizi pozivam.

Dužnost mi je da se na ovom mjestu zahvalim na značajnoj pomoći koju su mi pružili recenzenti ove Zbirke drugarica Fadila Arnautović, prosvjetni savjetnik iz Sarajeva i drug dr Mahmut Bajraktarević, profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu. Oni su svojim primjedbama i prijedlozima doprinijeli podizanju kvaliteta Zbirke. Osobito sam zahvalan profesoru Bajraktareviću koji je riješio sve zadatke u Zbirci i time izvršio kontrolu rezultata. Osim toga mi je pomogao svojim savjetima i preporukama da bi se podigao stručni i metodski nivo Zbirke.

Autor

ZADACI

1. Trigonometrijske funkcije oštrog ugla (šiljastog kuta). Njihove veze. Prirodne vrijednosti

1. Nađi vrijednosti trigonometrijskih funkcija uglova (kutova) α i β pravouglog trougla (pravokutnog trokuta) kome su a i b katete a c hipotenuza ako je zadano:

   a) $a=3,\ b=4$ b) $a=8,\ c=10$

   c) $b=15,\ c=17$ d) $a=12,\ b=35.$

2. Nađi konstrukcijom ugao (kut) α ako je poznata vrijednost trigonometrijske funkcije:

   a) $\sin\alpha=\frac{5}{7}$ b) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\cos\alpha=0{,}6$ d) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$

   e) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$ f) $\operatorname{tg}\alpha=2$ g) $\operatorname{ctg}\alpha=3$ h) $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{2}.$

3. Nađi vrijednosti ostalih trigonometrijskih funkcija ako je zadana funkcija $\sin\alpha$ i njezina vrijednost iznosi:

   a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{5}{13}$ c) $\frac{8}{17}$ d) $\frac{7}{25}$

   e) 0,8 f) $\frac{6a}{9+a^2}$ g) $\frac{2a}{a^2+1}$ h) $\frac{2ab}{a^2+b^2}.$

4. Odredi vrijednosti ostalih trigonometrijskih funkcija ako je zadana funkcija $\cos\alpha$ i njezina vrijednost iznosi:

   a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{12}{13}$ c) $\frac{20}{29}$ d) $\frac{9}{41}$

   e) 0,28 f) $\frac{10a}{a^2+25}$ g) $\frac{6a}{9+a^2}$ h) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$

5. Odredi vrijednosti ostalih trigonometrijskih funkcija ako je zadana funkcija $\operatorname{tg}\alpha$ i njezina vrijednost iznosi:

a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{5}{12}$ c) $\frac{7}{24}$ d) $\frac{9}{40}$

e) 0,75 f) $\frac{6a}{9-a^2}$ g) $\frac{a^2-1}{2a}$ h) $\frac{2ab}{a^2-b^2}$.

6. Nađi vrijednosti ostalih trigonometrijskih funkcija ako se zna funkcija $\operatorname{ctg}\alpha$ i njezina vrijednost iznosi:

a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{12}{5}$ c) $\frac{21}{20}$ d) $\frac{8}{15}$

e) 2,4 f) $\frac{a^2-9}{6a}$ g) $\frac{10a}{25-a^2}$ h) $\frac{a^2-4}{4a}$.

Izračunaj:

7. a) $\sin 30^\circ + \cos 30^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{ctg} 30^\circ$ b) $2\sin 45^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ - 3\operatorname{ctg} 45^\circ$
c) $\cos 45^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ + 2\operatorname{ctg} 45^\circ$ d) $\sin 60^\circ + 2\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{ctg} 60^\circ$.

8. a) $\sin^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ + \operatorname{tg}^2 60^\circ$ b) $2\sin^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ + \operatorname{ctg}^2 30^\circ$
c) $4\sin 30^\circ \cos 30^\circ \operatorname{tg} 60^\circ$ d) $3\operatorname{tg}^2 30^\circ - 4\sin 45^\circ \cos 60^\circ$.

9. a) $\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6}$ b) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$

c) $\sin\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{6}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$ d) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}^3\frac{\pi}{4}$.

10. a) $\frac{2\sin 30^\circ - 1}{2\sin 30^\circ + 1}$ b) $\frac{2\cos 45^\circ + 1}{2\cos 45^\circ - 1}$

c) $\frac{\sin 60^\circ - \sin 30^\circ}{\cos 60^\circ + \cos 30^\circ}$ d) $\frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{ctg} 60^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ}$.

11. a) $\frac{\sin^2 30^\circ + \sin^2 45^\circ}{\cos^2 30^\circ - \cos^2 45^\circ}$ b) $\frac{\operatorname{tg}^2 30^\circ + \operatorname{tg}^2 45^\circ}{\operatorname{ctg}^2 30^\circ - \operatorname{ctg}^2 45^\circ}$

c) $\frac{1 - 4\sin^2\frac{\pi}{6}}{1 + 4\cos^2\frac{\pi}{6}}$ d) $\frac{3\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{4}}{\sin^2\frac{\pi}{3} - \cos^2\frac{\pi}{4}}$.

Dok

12. $\frac{\text{si}}{1-}$

13. a) t

b) t

14. a) t

c) c

d) t

15. a) –

16. $\operatorname{tg}\alpha$

17. a) –

b)

18. $\frac{}{\sin^2}$

19. a) (

b) (

20. Dok

a) si

b) si

c) si

d) 3

Dokaži:

12. $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\sin\alpha\neq 0$.

13. a) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$, $\sin\alpha\neq 0$, $\cos\alpha\neq 0$

b) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\cos^2\alpha}$, $\cos\alpha\neq 0$.

14. a) $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$ b) $\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha$

c) $\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha$, $\cos\alpha\neq 0$

d) $\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$, $\cos\alpha\neq 0$, $\sin\alpha\neq 0$.

15. a) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$ b) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

16. $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha-\cos^3\alpha}$, $\cos\alpha\neq 0$, $\sin\alpha\neq 0$.

17. a) $\dfrac{1}{\cos\alpha}-\cos\alpha=\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha$, $\cos\alpha\neq 0$

b) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{2}{\sin\alpha}$, $\cos\alpha\neq -1$, $\sin\alpha\neq 0$.

18. $\dfrac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+2$.

19. a) $(2-\sin^2\alpha)(1+2\operatorname{tg}^2\alpha)=(2+2\operatorname{tg}^2\alpha)(2-\cos^2\alpha)$

b) $(2-\cos^2\alpha)(1+2\operatorname{ctg}^2\alpha)=(2+\operatorname{ctg}^2\alpha)(2-\sin^2\alpha)$.

20. Dokaži da ne zavisi od x izraz:

a) $\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x$

b) $\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x$

c) $\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^4 x+2\sin^4 x\cos^2 x$

d) $3(\sin^4 x+\cos^4 x)-2(\sin^6 x+\cos^6 x)$.

Na osnovu veza koje postoje između trigonometrijskih funkcija određenog ugla (kuta) izvrši transformacije tako da dati izraz dovedeš na što jednostavniji oblik u zadacima:

21. a) $\sin^3\alpha + \sin\alpha\cos^2\alpha$ b) $\cos\alpha\sin^2\alpha + \cos^3\alpha$.

22. a) $\sin\alpha - \sin\alpha\cos^2\alpha$ b) $\cos\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha$.

23. $\dfrac{\sin^2\alpha - \sin^4\alpha}{\cos^2\alpha - \cos^4\alpha}$ uz pretpostavku da je $\alpha \neq 0$ i $\alpha \neq 90°$ ili uopšte $\alpha \neq k \cdot 90°$ gdje je k cijeli broj.

24. a) $\sqrt{1+\sin\alpha}\,\sqrt{1-\sin\alpha}$ b) $\sqrt{1-\cos\alpha}\,\sqrt{1+\cos\alpha}$.

25. $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

26. a) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1$*) b) $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$ c) $\dfrac{1+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

27. a) $\dfrac{1}{1+\sin\alpha} + \dfrac{1}{1-\sin\alpha}$. b) $\dfrac{1}{1+\cos\alpha} + \dfrac{1}{1-\cos\alpha}$.

28. a) $\dfrac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} + \dfrac{1}{1+\sin\alpha}$ b) $\dfrac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \dfrac{1}{1+\cos\alpha}$

c) $\dfrac{1}{1-\sin\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$ d) $\dfrac{1}{1-\cos\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$.

29. a) $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ b) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - \dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

30. a) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha} - \dfrac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}$ b) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha} - \dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$.

31. a) $\dfrac{(1+\sin\alpha)^2+\cos^2\alpha}{(1+\sin\alpha)^2-\cos^2\alpha}$ b) $\dfrac{(1+\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2-\sin^2\alpha}$

c) $\dfrac{(1-\sin\alpha)^2+\cos^2\alpha}{(1-\sin\alpha)^2-\cos^2\alpha}$ d) $\dfrac{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}{(1-\cos\alpha)^2-\sin^2\alpha}$.

---

*) U svim zadacima u kojima se javljaju razlomci treba imati na umu da takav razlomak kao i izvršene transformacije imaju smisla samo uz pretpostavku da se radi o uglovima za koje imenilac (nazivnik) nije nula. To važi i za zadatke ostalih paragrafa.

Pri rješavanju ovih zadataka treba, isto tako, da imamo u vidu poznatu osobinu razlomka: ne može se skratiti izrazom koji ima vrijednost nula. Stoga, pri skraćivanju nekim trigonometrijskim izrazom, treba, u svakom slučaju, isključiti one vrijednosti ugla (kuta) za koje taj izraz postaje nula.

Ove napomene treba imati na umu i onda kada nismo na to posebno skrenuli pažnju u Uputama i rezultatima.

32. a)

c)

33. a)

34. a)

b)

35. a)

c)

36. $\frac{1+}{c}$

37. $\frac{1+}{s}$

38. a)

d)

39. a)

40. a)

41. a)

42. a)

43. a)

32. a) $\dfrac{1+\sin\alpha-\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}$ b) $\dfrac{1+\cos\alpha-\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$

c) $\dfrac{1-\sin\alpha-\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}$ d) $\dfrac{1-\cos\alpha-\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}$.

33. a) $\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}$ b) $\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$.

34. a) $\dfrac{\sin^4\alpha-\sin^4\beta}{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}+\dfrac{\cos^4\alpha-\cos^4\beta}{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}$

b) $\dfrac{\sin^4\alpha-\cos^4\beta}{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}+\dfrac{\cos^4\alpha-\sin^4\beta}{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$.

35. a) $\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\beta}{\sin^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta}$ b) $\dfrac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\cos^2\beta}{\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta}$

c) $\dfrac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\beta}{\cos^2\beta-\sin^2\alpha\cos^2\beta}$.

36. $\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos^2\alpha}-\dfrac{4-2\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{2\sin\alpha-\cos\alpha-1}{1-\sin\alpha}+\dfrac{3\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$.

37. $\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1+3\cos\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{2\sin\alpha+2\cos\alpha-1}{1-\cos\alpha}-\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

38. a) $\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha$ b) $\operatorname{ctg}\alpha\sin\alpha$ c) $\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$

d) $\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$ e) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}$ f) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\alpha}$.

39. a) $\sin^3\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\cos^3\alpha$ b) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha\operatorname{tg}\alpha$.

40. a) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha\sin^2\alpha$ b) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha\cos^2\alpha$.

41. a) $\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$ b) $\dfrac{\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\alpha}$.

42. a) $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\cos\alpha$ b) $(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)\sin\alpha$.

43. a) $\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$ b) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha$.

44. a) $(1+\operatorname{tg}\alpha)^2-2\operatorname{tg}\alpha$ b) $(1+\operatorname{ctg}\alpha)^2-2\operatorname{ctg}\alpha$

c) $(1-\operatorname{tg}\alpha)^2+2\operatorname{tg}\alpha$ d) $(1-\operatorname{ctg}\alpha)^2+2\operatorname{ctg}\alpha$.

45. $\dfrac{1}{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2+(1-\operatorname{tg}\alpha)^2}+\dfrac{1}{(1+\operatorname{ctg}\alpha)^2+(1-\operatorname{ctg}\alpha)^2}$

46. a) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$ b) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}+\dfrac{1+\operatorname{tg}^3\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$

c) $\dfrac{1-\operatorname{ctg}^3\alpha}{1-\operatorname{ctg}\alpha}+\dfrac{1+\operatorname{ctg}^3\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}$.

47. a) $\dfrac{\sin^3\alpha+\sin\alpha\cos^2\alpha}{\cos\alpha}$ b) $\dfrac{\cos^3\alpha+\sin^2\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

48. a) $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\cos^2\alpha}$ b) $\dfrac{1-(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha}$

c) $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\sin^2\alpha}$ d) $\dfrac{1-(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}$.

49. a) $\dfrac{1}{\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$ b) $\dfrac{1}{\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$.

50. a) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\sin\alpha}+\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\sin\alpha}$ b) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}$.

51. a) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$ b) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.

52. a) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$ b) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

53. $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\dfrac{3\sin\alpha-1}{1-\sin\alpha}-\dfrac{2}{1+\sin\alpha}$.

54. $2\operatorname{tg}\alpha-\dfrac{2-\sin\alpha}{\cos^2\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha+2}{1+\sin\alpha}$.

55. $\dfrac{1+\sin\alpha}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1+4\cos\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{1+3\sin\alpha-\cos\alpha}{1-\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

56. $\dfrac{1+\cos\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\dfrac{2}{\cos\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}-\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$.

57. $\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-4\operatorname{ctg}\alpha-\dfrac{2\cos\alpha+\sin\alpha-1}{1-\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha+2}{1+\cos\alpha}$.

58. a) $\dfrac{1-(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)}{\cos^4\alpha}$ b) $\dfrac{1-(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)}{\sin^4\alpha}$.

59. a) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\dfrac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)\cos^2\alpha}$

b) $\dfrac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{(\sin\alpha-\cos\alpha)\sin^2\alpha}-\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

60. a) $\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)}{\cos^4\alpha}$ b) $\dfrac{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}{\cos^4\alpha}$.

61. Napiši rezultat eliminacije parametra t iz jednačina:

a) $x=3\cos t$, $y=3\sin t$ b) $x=r\cos t$, $y=r\sin t$ c) $x=5\cos t$, $y=3\sin t$

d) $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ e) $x=5+3\cos t$, $y=7+3\sin t$ f) $x=p+r\cos t$, $y=q+r\sin t$.

Pomoću tablica prirodnih vrijednosti trigonometrijskih funkcija nađi:

62. a) $\sin 48°20'$ b) $\cos 24°10'$ c) $\operatorname{tg} 36°20'$ d) $\operatorname{ctg} 40°$
e) $\sin 65°10'$ f) $\cos 68°40'$ g) $\operatorname{tg} 80°$ h) $\operatorname{ctg} 56°50'$.

63. a) $\sin 24°18'$ b) $\cos 36°12'$ c) $\operatorname{tg} 40°22'$ d) $\operatorname{ctg} 36°41'$
e) $\sin 56°18'$ f) $\cos 49°23'$ g) $\operatorname{tg} 68°9'$ h) $\operatorname{ctg} 80°25'$.

Pomoću tablica prirodnih vrijednosti trigonometrijskih funkcija nađi ugao (kut) iz poznate vrijednosti funkcije u zadacima:

64. a) $\sin\alpha=0{,}66044$ b) $\cos\alpha=0{,}95630$ c) $\operatorname{tg}\alpha=0{,}44523$
d) $\operatorname{ctg}\alpha=1{,}0538$ e) $\sin\alpha=0{,}79335$ f) $\cos\alpha=0{,}44620$
g) $\operatorname{tg}\alpha=1{,}0913$ h) $\operatorname{ctg}\alpha=0{,}63299$.

65. a) $\sin\alpha=0{,}97450$ b) $\cos\alpha=0{,}85688$ c) $\operatorname{tg}\alpha=0{,}61322$
d) $\operatorname{ctg}\alpha=0{,}41491$.

2. Rješavanje pravouglog trougla (pravokutnog trokuta) pomoću prirodnih vrijednosti trigonometrijskih funkcija

Neka su a i b katete, α i β suprotni uglovi (kutovi), c hipotenuza a P površina pravouglog trougla (pravokutnog trokuta). Riješi pravougli trougao (ugao tražimo sa tačnošću na minutu) pomoću prirodnih vrijednosti trigonometrijskih funkcija ako je zadano:

66. a) $c = 5$, $\alpha = 36°52'$ b) $a = 3$, $\alpha = 36°52'$
c) $c = 13$, $\beta = 22°37'$ d) $b = 16$, $\beta = 14°15'$.

67. a) $a = 16$, $\beta = 75°45'$ b) $a = 63$, $\alpha = 75°45'$
c) $b = 21$, $\alpha = 43°36'$ d) $b = 84$, $\beta = 81°12'$.

68. a) $a = 16$, $c = 65$ b) $b = 4$, $c = 5$
c) $a = 20$, $b = 21$ d) $a = 13$, $c = 85$.

69. a) $a : c = 3 : 5$, $b = 8$ b) $b : c = 12 : 13$, $a = 15$
c) $a : b = 5 : 12$, $c = 52$ d) $b : a = 21 : 20$, $c = 58$.

70. a) $P = 6$, $a = 3$ b) $P = 180$, $b = 40$
c) $P = 30$, $\alpha = 22°37'$ d) $P = 24$, $\beta = 53°8'$.

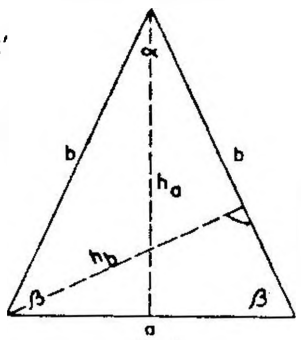
71. U pravouglom trouglu su p i q projekcije kateta a i b na hipotenuzu c, a h je hipotenuzina visina. Riješi trougao ako je zadano:

a) $a = 3$, $p = \frac{9}{5}$ b) $p = 3{,}6$, $\alpha = 36°52'$

c) $h = \frac{60}{13}$, $\alpha = 22°37'$ d) $q = 16$, $\beta = 53°8'$.

72. Riješi jednakokraki trougao (istokračni trokut) ako je zadano (vidi sl. 1):

a) $a = 32$, $\alpha = 28°30'$ b) $b = 41$, $\beta = 77°19'$
c) $h_a = 13$, $\beta = 8°48'$ d) $h_b = 12$, $\beta = 67°23'$.



Sl. 1

73. U kruži centraln kružnice

74. U kruži Izrazi p pomoću

75. U kruž tralni ug tralni ug

76. Na kruž je centra

77. Dijagona ugao α.

78. Zadana gonale a ualu d p

79. Na tijelo raju pravi nentama

80. Izrazi dij

81. Iz udalje uglom α

82. Kolika je zrake zat

83. Projekcija Koliki je

84. Duž $d = 6$ Kolika je

85. Na horiz visine $h =$ ugao Sun

86. Karakteris i ugao α

87. Osnovna i ugao boč a i α.

73. U kružnici polupreč nika (radijusa) r povučena je tetiva kojoj pripada centralni ugao α. Izrazi dužinu tetive i njezino rastojanje od središta kružnice pomoću veličina r i α.

74. U kružnici je povučena tetiva dužine t kojoj pripada centralni ugao α. Izrazi polupreč nik kružnice i rastojanje d tetive od središta kružnice pomoću veličina t i α.

75. U kružnici su zadane dvije tetive a i b. Prvoj tetivi pripada centralni ugao α. Napiši relaciju pomoću koje se može izračunati centralni ugao β koji pripada drugoj tetivi.

76. Na kružnicu polupreč nika $r = 9$ povučene su tangente iz tačke čija je centralno odstojanje $d = 41$. Koji ugao zatvaraju tangente?

77. Dijagonala d pravougaonika (pravokutnika) zatvara sa osnovicom ugao α. Izrazi stranice pravougaonika a i b pomoću veličina d

78. Zadana je osnovica a pravougaonika i ugao φ koji zatvaraju dijagonale a leži naspram stranice a. Izrazi drugu stranicu b i dijagonalu d pomoću a i φ.

79. Na tijelo djeluju dvije sile $P = 21$ kN i $Q = 20$ kN čiji vektori zatvaraju pravi ugao. Kolika je rezultanta R i koji ugao zatvara sa komponentama P i Q?

80. Izrazi dijagonale romba pomoću njegove stranice a i ugla α.

81. Iz udaljenosti $d = 15$ m od podnožja tornja vidi se njegov vrh pod uglom $\alpha = 53°8'$. Kolika je visina tornja?

82. Kolika je dužina sjene koju baca predmet visine $d = 9$ m ako sunčane zrake zatvaraju sa horizontom ugao $\alpha = 12°41'$?

83. Projekcija duži (dužine) $d = 15$ na jednu pravu (pravac) je $d = 9$. Koliki je nagibni ugao (kut priklona) α?

84. Duž $d = 65$ je nagnuta prema ravni projiciranja pod uglom $\alpha = 14°15'$. Kolika je projekcija?

85. Na horizontalnom terenu nalazi se u vertikalnom položaju stub visine $h = 4{,}5$ m. On baca sjenu dužine $d = 20$ m. Koliki je elevacioni ugao Sunca?

86. Karakteristični presjek kosog valjka je romb čija je stranica $a = 130$ cm i ugao $\alpha = 75°45'$. Kolika je zapremina (volumen) valjka?

87. Osnovna ivica (brid) pravilne četvorostrane piramide je a a nagibni ugao bočne ivice α. Izrazi zapreminu piramide kao funkciju od a i α.

88. Bočna ivica b pravilne četvorostrane piramide nagnuta je prema bazi pod uglom α. Izrazi zapreminu piramide kao funkciju od b i α.

89. Izvodnica s uspravne kupe (konusa) zatvara ugao α sa bazom. Izrazi zapreminu kupe kao funkciju od s i α.

90. Visina uspravne kupe je h a nagibni ugao izvodnice prema bazi α. Izrazi zapreminu kupe kao funkciju od h i α.

91. Prečnik (promjer) baze prave kupe je d a ugao pri vrhu α. Izrazi zapreminu kupe kao funkciju od d i α.

92. Jednakokraki trougao (istokračni trokut) ima krak b a ugao na osnovici α. Trougao rotira oko simetrale. Nađi izraz za zapreminu nastalog tijela kao funkciju od b i α.

3. Opšta definicija trigonometrijskog ugla. Trigonometrijske funkcije bilo kojeg ugla. Redukcija na prvi kvadrant. Grafici trigonometrijskih funkcija

Izrazi u radijanima uglove (kutove):

93. a) 30°, 45°, 60°, 90° b) 120°, 135°, 150°, 180°
c) 210°, 225°, 240°, 270° d) 300°, 330°, 315°, 360°.

94. a) 15°, 22°30′, 7°30′, 10° b) 20°, 5°, 67°30′, 24°.

95. a) 720°, 1080°, 1440° b) 540°, 450°, 630°.

Izrazi u stepenima uglove:

96. a) $\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ b) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}$
c) $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$ d) $\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{9}, \frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{18}$.

97. a) $3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi$ b) $\frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}$
c) $\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}$ d) $\frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}$.

98. Na trigonometrijskoj kružnici (kružnoj liniji) odredi ugao koji je suprotan uglu od:

a) 30° b) 45° c) 120° d) 150°
e) $\frac{\pi}{3}$ f) $\frac{\pi}{2}$ g) $\frac{3\pi}{4}$ h) α.

99. Na trigonometrijskoj kružnici nađi ugao koji je dijametralno suprotan uglu od:

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $45°$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $120°$.

100. Na trigonometrijskoj kružnici odredi ugao koji je komplementan uglu od:

a) $30°$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $50°$ d) $\frac{\pi}{9}$

e) $150°$ f) $720°$ g) $-40°$ h) $-\frac{\pi}{6}$.

101. Na trigonometrijskoj kružnici odredi ugao koji je suplementan uglu od:

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $45°$ c) $-\frac{\pi}{3}$ d) $250°$ e) $-700°$.

102. Nađi vrijednosti za sve četiri trigonometrijske funkcije za uglove:

a) $120°$ b) $\frac{3\pi}{4}$ c) $\frac{5\pi}{6}$ d) $\frac{7\pi}{6}$

e) $\frac{5\pi}{4}$ f) $240°$ g) $300°$ h) $\frac{7\pi}{4}$.

103. Nađi vrijednosti za sve četiri trigonometrijske funkcije za uglove:

a) $-30°$ b) $-\frac{\pi}{4}$ c) $-60°$ d) $-120°$

e) $-\frac{3\pi}{4}$ f) $-\frac{4\pi}{3}$ g) $-\frac{5\pi}{3}$ h) $-\frac{7\pi}{6}$.

104. Zadana je funkcija $f(x)=\frac{\sin x-1}{\cos x+1}$; izračunaj:

a) $f(0)$ b) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ c) $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ d) $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

105. Zadano je $f(x)=\frac{\sin x-1}{2\cos x}$; nađi:

a) $f(0)$ b) $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ c) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ d) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Izračuna

106. a) cos 1

b) cos 1

c) 2 cos

d) $\sin\frac{3}{2}$

107. a) 2 cos

b) cos 2

c) sin 1

d) $\sin\pi$

108. Nađi ug

a) $\sin\alpha$ =

c) $\sin\alpha$ =

109. Nađi ug

a) $\cos\alpha$

c) $\cos\alpha$

110. Nađi ug

a) $\operatorname{tg}\alpha$ =

c) $\operatorname{tg}\alpha$ =

111. Nađi ug

a) $\operatorname{ctg}\alpha$ =

c) $\operatorname{ctg}\alpha$ =

Izračunaj:

106. a) $\cos 180° - \sin 150° + \operatorname{tg} 225° - \cos 240°$

b) $\cos 120° + \sin 180° - \operatorname{ctg} 225° - \operatorname{tg} 135°$

c) $2\cos 120° - 3\operatorname{tg} 150° + 2\sin 210° - \operatorname{ctg} 135°$

d) $\sin \frac{3\pi}{2} + \cos \frac{5\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} + \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{6}$.

107. a) $2\cos 120° \cdot \operatorname{tg} 135° + \sin 210°$

b) $\cos 240° \cdot \sin 120° + \sin 60° \cdot \cos 300°$

c) $\sin 120° \cdot \cos 300° + \sin 270° \cdot \cos 135°$

d) $\sin \pi \cos \frac{5\pi}{6} - \cos \frac{5\pi}{4} \sin \frac{5\pi}{3}$.

108. Nađi uglove od 0° do 360° za koje je:

a) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ b) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$.

109. Nađi uglove od 0° do 360° za koje je:

a) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ b) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

110. Nađi uglove od 0° do 360° za koje je:

a) $\operatorname{tg} \alpha = -1$ b) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$ d) $\operatorname{tg} \alpha = 1$.

111. Nađi uglove od 0° do 2π za koje je:

a) $\operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{3}$ b) $\operatorname{ctg} \alpha = 1$

c) $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$.

112. Nađi $\cos\alpha$ ako je:

a) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

b) $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

c) $\sin\alpha=-\frac{60}{61}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

113. Nađi $\sin\alpha$ ako je:

a) $\cos\alpha=-\frac{8}{17}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

b) $\cos\alpha=\frac{40}{41}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

c) $\cos\alpha=-\frac{24}{25}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

114. Nađi $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ ako je:

a) $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{8}{15}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

b) $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{35}{12}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

c) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{11}{60}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

115. Nađi $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ ako je:

a) $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{3}{4}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

b) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{12}{35}$, $180°<\alpha<270°$

c) $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{9}{40}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

116. Nađi vrijednosti ostalih trigonometrijskih funkcija ako je:

a) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ b) $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

c) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ d) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\pi<\pi<\frac{3\pi}{2}$

e) tg

g) c

117. Nađ

a) si

c) si

118. Nađi

a) cc

c) co

119. Nađi

a) tg

c) tg

Pojedi

120. a) sin

b) sin

c) tg

d) tg(

121. a) 2 si

c) sin

122. a) tg(

c) tg(

e) $\operatorname{tg}\alpha = -1,\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ f) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3},\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

g) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ h) $\operatorname{ctg}\alpha = 1,\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

117. Nađi vrijednosti ostalih trigonometrijskih funkcija ako je:

a) $\sin\alpha = \frac{20}{29},\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ b) $\sin\alpha = -\frac{7}{25},\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

c) $\sin\alpha = -\frac{16}{65},\ 270° < \alpha < 360°$ d) $\sin\alpha = \frac{28}{53},\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

118. Nađi vrijednosti ostalih trigonometrijskih funkcija ako je:

a) $\cos\alpha = -\frac{28}{53},\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ b) $\cos\alpha = \frac{12}{37},\ 270° < \alpha < 360°$

c) $\cos\alpha = -\frac{7}{25},\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ d) $\cos\alpha = -\frac{3}{5},\ 90° < \alpha < 180°$

119. Nađi vrijednosti ostalih trigonometrijskih funkcija ako je:

a) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4},\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{40}{9},\ 180° < \alpha < 270°$

c) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{16}{63},\ \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ d) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{11}{60},\ 90° < \alpha < 180°$.

Pojednostavi izraze:

120. a) $\sin\alpha\cos(-\beta) + \sin(-\alpha)\cos(-\beta)$

b) $\sin(-x)\cos y - \sin x\cos(-y)$

c) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}(-\beta) - \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}(-\beta)$

d) $\operatorname{tg}(-\alpha)\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{tg}(-\alpha)\operatorname{ctg}(-\beta)$.

121. a) $2\sin(90° - \alpha) - 3\cos(90° + \alpha)$ b) $a\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

c) $\sin(180° - \alpha) + \sin(180° + \alpha)$ d) $\cos(\pi - \alpha) - \cos(\alpha - \pi)$.

$\alpha < 2\pi$ **122.** a) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ b) $\operatorname{ctg}(180° - \alpha) - \operatorname{ctg}(180° + \alpha)$

$< \pi < \frac{3\pi}{2}$ c) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$ d) $\operatorname{tg}(90° - \alpha)\operatorname{ctg}(90° + \alpha)$.

123. a) $\dfrac{\sin(90°+\alpha)\cos(90°-\alpha)}{\cos(180°+\alpha)}+\dfrac{\sin(180°-\alpha)\cos(90°+\alpha)}{\sin(180°+\alpha)}$

b) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}-\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$

c) $\dfrac{\sin(180°-\alpha)}{\sin(180°+\alpha)}-\dfrac{\operatorname{tg}(90°+\alpha)}{\operatorname{tg}(90°-\alpha)}$ d) $\dfrac{\operatorname{ctg}(180°-\alpha)}{\operatorname{ctg}(180°+\alpha)}-\dfrac{\cos(90°-\alpha)}{\cos(90°+\alpha)}$

124. Dokaži:

a) $\sin\alpha\sin(-\alpha)-\cos\alpha\cos(-\alpha)+1=0$

b) $\sin(-\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)-\cos(\alpha+\beta)\cos(-\alpha-\beta)+1=0$

c) $\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\alpha)-\cos(\alpha-\beta)\cos(\beta-\alpha)+1=0$

d) $\sin(180°+\alpha)\cos(180°-\alpha)+\sin(360°-\alpha)\cos(360°-\alpha)=0$.

125. Odredi vrijednosti svih trigonometrijskih funkcija za uglove:

a) $450°$ b) $540°$ c) $630°$ d) $1080°$

e) $390°$ f) $765°$ g) $\dfrac{11\pi}{4}$ h) $\dfrac{8\pi}{3}$

i) $-390°$ j) $-765°$ k) $-\dfrac{19\pi}{3}$ l) $-540°$.

126. Nađi sve uglove za koje je:

a) $\sin x=\dfrac{1}{2}$ b) $\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\cos x=-\dfrac{1}{2}$

e) $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$ f) $\operatorname{ctg} x=1$

g) $\operatorname{tg} x=1$ h) $\operatorname{ctg} x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

127. Za koje vrijednosti od x nije definisan razlomak:

a) $\dfrac{3\sin x}{\cos x-1}$ b) $\dfrac{\cos x}{\sin x+1}$ c) $\dfrac{2\sin x+1}{2\sin x-1}$

d) $\dfrac{3}{\sqrt{2}\cos x+1}$ e) $\dfrac{3}{\sin x-\cos x}$ f) $\dfrac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}$

g) $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - 1}$ h) $\dfrac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x + \sqrt{3}}$ i) $\dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 x - \sin x}$

j) $\dfrac{\sin x - 1}{\sin^2 x - 1}$ k) $\dfrac{\cos x + 1}{\cos^2 x - 1}$ l) $\dfrac{2 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x}$?

128. Za koju vrijednost od x ne smijemo skratiti razlomak:

a) $\dfrac{\sin x}{\sin x \cos x}$ b) $\dfrac{3(\sin x + 1)}{5(\sin x + 1)}$

c) $\dfrac{\cos x - 1}{\cos^2 x - \cos x}$ d) $\dfrac{2 \sin^2 x - 1}{\sqrt{2} \sin x + 1}$

e) $\dfrac{1 - \sin x}{2 \sin^2 x - \sin x - 1}$, $\sin x \neq 1$ f) $\dfrac{\cos^2 x - \cos x}{1 + \cos x - 2 \cos^2 x}$?

129. Predstavi u istom koordinatnom sistemu grafike funkcija i uoči kako se prelazi iz grafika funkcije $y = \sin x$ na grafike ostalih predstavljenih funkcija opšteg oblika $y = a \sin(bx + c)$. Razmotri na pojedinim zadacima kakav je pri tome prelazu značaj amplitude a, periode $\dfrac{2\pi}{b}$ i pomaka u fazi $-\dfrac{c}{b}$:

a) $y = \sin x$, $y = 2 \sin x$, $y = \dfrac{1}{2} \sin x$

b) $y = \sin x$, $y = -\dfrac{1}{2} \sin x$

c) $y = \sin x$, $y = \sin 2x$, $y = \sin \dfrac{1}{2} x$

d) $y = \sin 2x$, $y = \sin \dfrac{x}{2}$, $y = \sin \dfrac{3x}{2}$

e) $y = \sin x$, $y = \sin \left(x - \dfrac{\pi}{3} \right)$

f) $y = \sin x$, $y = \sin \left(x + \dfrac{\pi}{3} \right)$

g) $y = \sin x$, $y = \sin 3x$, $y = \sin 3 \left(x - \dfrac{\pi}{6} \right)$

h) $y = \cos x$, $y = \cos 2x$, $y = 2 \cos x$.

130. U koordinatnom sistemu predstavi funkcije:

a) $y=\operatorname{tg} x$ u intervalu od $-\frac{\pi}{2}$ do 2π

b) $y=\operatorname{tg} 2x$ u intervalu od $-\frac{\pi}{4}$ do π

c) $y=\operatorname{ctg} x$ u intervalu od $-\pi$ do $\frac{3\pi}{2}$

d) $y=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ u intervalu od $-\frac{3\pi}{2}$ do 3π.

131. Da li su periodične funkcije:

a) $y=1-\sin x$ b) $y=x+\sin x$

c) $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ d) $y=\frac{\operatorname{ctg} x}{x}$?

132. Nađi osnovne periode funkcija:

a) $\sin 4x$ b) $\sin\frac{x}{3}$ c) $\sin\frac{2x-5}{3}$ d) $\frac{\sin x}{2}$

e) $\sin^2 x$ f) $\cos 3x$ g) $\cos\frac{x}{7}$ h) $\operatorname{tg} 5x$

i) $\sin x+\operatorname{tg} x$ j) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

133. Koliko različitih vrijednosti ima: a) $\cos\frac{2k\pi}{5}$, b) $\cos\frac{2k\pi}{9}$, gdje je k cijeli broj?

134. Iz grafika pročitaj uglove (kutove) x iz intervala od -2π do 2π za koje je:

a) $\sin x=\frac{1}{2}$ b) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\cos x=-1$

e) $\operatorname{tg} x=1$ f) $\operatorname{ctg} x=\sqrt{3}$ g) $\operatorname{tg} x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ h) $\operatorname{ctg} x=-1$.

135. Pročitaj iz grafika da je:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ b) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$

c) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ d) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

136.

137.

138.

139.

140.

141.

142.

143.

144.

136. Na osnovu grafika odredi vrijednosti ugla x iz naznačenog intervala za koje je:

a) $\sin x = \cos x$, $[-\pi, 2\pi]$ b) $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$, $[0, 2\pi]$

c) $\sin x > \cos x$, $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ d) $\operatorname{tg} x < \operatorname{ctg} x$, $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

e) $\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$, $[0, \pi]$ f) $0 < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0, 2\pi]$

g) $|\sin x| < \frac{1}{2}$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ h) $|\cos x| > \frac{3}{2}$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

137. Pročitaj iz grafika da je:

a) $\sin x = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(2\pi - x) = -\sin(-x)$

b) $\cos x = -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x) = \cos(2\pi - x) = \cos(-x)$

c) $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(\pi - x) = \operatorname{tg}(\pi + x) = -\operatorname{tg}(2\pi - x)$.

138. Pročitaj iz grafika da je:

a) $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) =$

$= \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$

b) $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) =$

$= -\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$.

139. Za koje vrijednosti od x između π i 2π je $\operatorname{tg}^2 x < 1$?

140. Za koje vrijednosti od x između 0 i π važi $\operatorname{ctg}^2 x > 1$?

141. Nacrtaj grafik funkcije $y = |\sin x|$ i iz grafika pročitaj za koje vrijednosti od x je $|\sin x| > \frac{1}{2}$.

142. Nacrtaj grafik funkcije $y = |\operatorname{tg} x|$ i pročitaj iz grafika za koje vrijednosti od x između $-\frac{\pi}{2}$ i $+\frac{\pi}{2}$ je $|\operatorname{tg} x| < 1$.

143. Nacrtaj grafik funkcije $y = |\cos 2x|$ i pročitaj iz grafika za koje vrijednosti od x između 0 i π važi $|\cos 2x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

144. Uvjeri se iz grafika da je $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ za bilo koji pozitivni broj x manji od $\frac{\pi}{2}$.

4. Adiciona teorema (trigonometrijske funkcije binoma)

Dokaži:

145. a) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$

b) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$

c) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$

d) $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$.

146. a) $\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cos\beta-\sin\beta)$

b) $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\beta+\cos\beta)$

c) $\sin(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=(\sin\alpha-\cos\alpha)(\cos\beta-\sin\beta)$

d) $(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$.

147. a) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-1=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

b) $\cos^2\alpha-\cos^2\beta=-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

c) $1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

d) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$

e) $\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

f) $\sin\alpha\cos\alpha-\sin\beta\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

148. a) $\sin(30°+\alpha)+\sin(30°-\alpha)=\cos\alpha$

b) $\cos(60°-\alpha)+\cos(60°+\alpha)=\cos\alpha$

c) $\sin(45°+\alpha)+\sin(45°-\alpha)=\sqrt{2}\cos\alpha$

d) $\cos(45°-\alpha)+\cos(45°+\alpha)=\sqrt{2}\cos\alpha$.

149. $\dfrac{\sin(45°+\alpha)-\sin(45°-\alpha)}{\sin(45°+\alpha)+\sin(45°-\alpha)}=\operatorname{tg}\alpha$.

150.

151.

152.

153.

154.

150. a) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

b) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

c) $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$

d) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$.

151. a) $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\cos\beta}$

b) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\cos\beta}$.

152. a) $1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

b) $1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

c) $1+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$

d) $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$

e) $1-\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$.

153. a) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$

b) $\dfrac{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$.

154. a) $\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$

b) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$.

155. a) $\dfrac{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$.

b) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$

c) $\dfrac{1+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$.

156. $1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$.

Izračunaj:

157. Ako je $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\sin\beta=\dfrac{5}{13}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$, koliko je:

a) $\sin(\alpha+\beta)$, b) $\cos(\alpha+\beta)$?

158. Ako je $\cos\alpha=\dfrac{7}{25}$, $\sin\beta=\dfrac{3}{5}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$, nađi $\sin(\alpha-\beta)$ i objasni rezultat!

159. a) Za uglove $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ zadano je $\sin\alpha=\dfrac{15\sqrt{3}}{26}$, $\cos\beta=\dfrac{23}{26}$; izračunaj $\cos(\alpha-\beta)$. Objasni rezultat!

b) $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\cos\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$, $\sin(\alpha+\beta)=?$

c) $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\sin\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$, $\cos(\alpha+\beta)=?$

d) $\sin\alpha=\dfrac{11}{13}$, $\cos\beta=\dfrac{23}{26}$, $\sin(\alpha-\beta)=?$

e) $\sin\alpha=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$, $\sin\beta=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$, $\cos(\alpha+\beta)=?$

160. a) Za uglove $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ zadano je $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$, $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$; izračunaj $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$. Objasni rezultat!

b) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=?$

c) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{3}{5}$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=?$

d) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{n}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{n-1}{n+1}$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=?$ Objasni rezultat!

e) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{7\sqrt{3}}{5}$, $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=?$

f) $\operatorname{tg}\alpha=5$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=?$

161. Ako je $\alpha-\beta=45°$, $\cos\beta=\frac{17\sqrt{2}}{26}$, nađi $\sin\alpha$, $\cos\alpha$; $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

162. Ako je $\alpha+\beta=60°$, $\cos\alpha=\frac{11}{13}$, koliko je $\cos\beta$?

163. $\alpha-\beta=60°$, $\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; $\sin\beta=?$ $\cos\beta=?$

164. $\alpha+\beta=135°$, $\sin\alpha=\frac{15}{17}$; $\sin\beta=?$, $\cos\beta=?$

165. $\alpha+\beta=45°$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=?$

166. Zadano je $\operatorname{tg}\alpha=2$; izračunaj:

a) $\operatorname{tg}(\alpha+45°)$ b) $\operatorname{tg}(\alpha-45°)$ c) $\operatorname{tg}(\alpha+60°)$ d) $\operatorname{tg}(\alpha-60°)$.

167. Ako je $\alpha+\beta=45°$, onda je $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=1$. — Dokaži!

168. $\alpha-\beta=45°$, $\operatorname{tg}\alpha=2$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{tg}\beta=?$

169. $\alpha-\beta=30°$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5\sqrt{3}}{9}$, $\operatorname{tg}\beta$?

170. $\alpha+\beta=60°$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=?$

171. $\alpha+\beta=120°$, $\operatorname{tg}\alpha=15\sqrt{3}$; $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta=?$

172. $\alpha+\beta+\gamma=180°$, $\sin\alpha=\frac{12}{13}$, $\sin\beta=\frac{3}{5}$; $\sin\gamma$, $\cos\gamma=?$

Sva tri ugla oštra.

173. $\alpha+\beta+2\gamma=180°$, $\alpha-\beta=90°$, $\operatorname{tg}\gamma=\frac{7}{17}$, $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$; nađi $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$!

Izračunaj bez upotrebe tablica:

174. a) $\sin 75°$ b) $\sin 15°$ c) $\sin 105°$
d) $\cos 75°$ e) $\cos 15°$ f) $\cos 105°$.

175. a) $\operatorname{tg} 75°$ b) $\operatorname{tg} 15°$ c) $\operatorname{tg} 105°$
d) $\operatorname{ctg} 75°$ e) $\operatorname{ctg} 15°$ f) $\operatorname{ctg} 105°$.

Dokaži:

176. a) $\cos(30°-\alpha)-\cos(30°+\alpha)=\sin\alpha$
b) $\sin(60°+\alpha)-\sin(60°-\alpha)=\sin\alpha$.

177. a) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha$ b) $\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\sin\alpha$
c) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=-\cos\alpha$ d) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=\pm\sin\alpha$.

178. $\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)+\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)=0$.

179. a) $\sin\alpha+\sin(\alpha+120°)+\sin(\alpha+240°)=0$
b) $\cos\alpha+\cos(\alpha+120°)+\cos(\alpha+240°)=0$.

180. a) $\sin(45°\pm\alpha)=\cos(45°\mp\alpha)$ b) $\operatorname{tg}(45°+\alpha)=\operatorname{ctg}(45°-\alpha)$
c) $\operatorname{tg}(45°+\alpha)\operatorname{tg}(45°-\alpha)=1$.

181. a) $\sin^2(\alpha+45°)+\sin^2(\alpha-45°)=1$
b) $\cos^2(\alpha+45°)+\cos^2(\alpha-45°)=1$.

182. a) $\operatorname{tg}(\alpha+45°)=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$ b) $\operatorname{tg}(\alpha+60°)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}$.

183. a) $\sin^2\alpha+\sin^2(\alpha+120°)+\sin^2(\alpha-120°)=\frac{3}{2}$

b) $\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+120°)+\cos^2(\alpha-120°)=\frac{3}{2}$.

184. Pomoću trigonometrijskih funkcija uglova (kutova) α, β i γ izrazi:

a) $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ b) $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ c) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$

d) $\sin(\alpha+\beta-\gamma)$ e) $\sin(\alpha-\beta-\gamma)$ f) $\cos(\alpha+\beta-\gamma)$.

185. Ako je $\alpha+\beta+\gamma=90°$, a nijedan od uglova nije takav da je njegov tangens beskonačan, onda je $\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=1$. — Dokaži!

186. Kakva relacija veže veličine α i β ako je:

a) $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha+1}$ b) $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$?

Dovedi na najjednostavniji oblik izraze:

187. a) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\cos\beta}$ b) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)-\sin\alpha\cos\beta}$

c) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}$ d) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$.

188. a) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}$ b) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$

c) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$ d) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}$.

189. a) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\pm\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$ b) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\pm\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}$.

190. a) $\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$

b) $\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta$

c) $\cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)\sin\beta$

d) $\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)$.

191. a) $(\sin\alpha+\cos\beta)^2+(\cos\alpha\pm\sin\beta)^2-2\sin(\alpha\pm\beta)$

b) $(\sin\alpha+\cos\beta)^2+(\cos\alpha\mp\sin\beta)^2+2\sin(\alpha\pm\beta)$. Na koji način *b*) slijedi iz *a*)?

192. a) $(\sin\alpha\pm\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2-2\cos(\alpha\mp\beta)$

b) $(\sin\alpha\mp\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2+2\cos(\alpha\mp\beta)$.

Na koji način slijedi a) iz prethodnog zadatka a), a b) iz b)?

193. a) $(\sin\alpha \pm \cos\alpha)(\sin\beta \pm \cos\beta) \mp \sin(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$

b) $(\sin\alpha \pm \cos\alpha)(\sin\beta \mp \cos\beta) \pm \sin(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$.

Na koji način slijedi b) iz a)?

194. a) $\dfrac{\sin^3\alpha \mp \cos^3\beta}{\sin\alpha \mp \cos\beta} + \dfrac{\cos^3\alpha \mp \sin^3\beta}{\cos\alpha \mp \sin\beta} \mp \sin(\alpha+\beta)$

b) $\dfrac{\sin^3\alpha \mp \cos^3\beta}{\sin\alpha \mp \cos\beta} + \dfrac{\cos^3\alpha \pm \sin^3\beta}{\cos\alpha \pm \sin\beta} \mp \sin(\alpha-\beta)$.

195. a) $\dfrac{\cos^3\alpha \pm \cos^3\beta}{\cos\alpha \pm \cos\beta} + \dfrac{\sin^3\alpha \pm \sin^3\beta}{\sin\alpha \pm \sin\beta} \pm \cos(\alpha-\beta)$

b) $\dfrac{\cos^3\alpha \pm \cos^3\beta}{\cos\alpha \pm \cos\beta} + \dfrac{\sin^3\alpha \mp \sin^3\beta}{\sin\alpha \mp \sin\beta} \pm \cos(\alpha+\beta)$.

Na koji način slijede zadaci a) i b) iz prethodnog zadatka?

196. a) $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\beta)^2+(\cos\alpha \pm \sin\beta)^2-2}{(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha \mp \sin\beta)^2-2}$

b) $\dfrac{(\sin\alpha \mp \sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2-2}{(\sin\alpha-\cos\beta)^2+(\cos\alpha \pm \sin\beta)^2-2}$.

197. a) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} + \dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}$ b) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} + \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}$.

198. Nađi nepoznate x i y iz sistema jednačina:

a) $x\sin\alpha + y\sin\beta = \sin\gamma$
$x\cos\alpha + y\cos\beta = \cos\gamma$

b) $x\sin\alpha - y\sin\beta = \sin\gamma$
$x\cos\alpha + y\cos\beta = \cos\gamma$.

Pojednostavi izraze:

199. a) $\sin 10^\circ\cos 50^\circ + \cos 10^\circ\sin 50^\circ$

b) $\cos\dfrac{3\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{8} + \sin\dfrac{3\pi}{8}\sin\dfrac{\pi}{8}$

c) $\cos(20^\circ+\alpha)\cos(20^\circ-\alpha) + \sin(20^\circ+\alpha)\sin(20^\circ-\alpha)$

d) $\cos(36^\circ+\alpha)\cos(54^\circ+\alpha) - \sin(36^\circ+\alpha)\sin(54^\circ+\alpha)$

e) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$

f) $\sin\alpha + \sin\beta\cos(\alpha+\beta)$

g) $\sin 15° + \operatorname{tg} 30° \cos 15°$

h) $\cos 20° + \operatorname{tg}\alpha \sin 20°$.

200. Nađi:

a) $\operatorname{tg}(45°-\alpha)$ ako je $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ i $180°<\alpha<270°$

b) $\sin(60°-\alpha)$ ako je $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ i $180°<\alpha<270°$.

201. Nađi:

a) $\sin\alpha$ ako je $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = -\frac{2}{3}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

b) $\operatorname{tg}\alpha$ ako je $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = a$

202. Kosinusi zbira (sume) dvaju uglova iznose 0,3 a kosinusi njihove razlike iznose 0,8. Nađi proizvod (umnožak) sinusa tih uglova.

203. Zadano je $\sin(\alpha+\beta) = a$ i $\sin(\alpha+\gamma) = b$ gdje su pozitivni brojevi α, β i γ manji od $\frac{\pi}{4}$. Nađi $\sin(\beta-\gamma)$.

204. Zadano je $\sin\alpha = 0{,}8$, $\sin\beta = 0{,}28$, $\cos\gamma = -\frac{5}{13}$ gdje je $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\gamma<\pi$. Nađi $\cos(\alpha+\beta-\gamma)$.

205. Tangensi triju oštrih (šiljastih) uglova (kutova) iznose $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{4}$ i $\frac{8}{19}$. Dokaži da je suma prvih dvaju uglova za 45° veća od trećeg ugla.

206. Dokaži: $\operatorname{tg}(\beta-\gamma)+\operatorname{tg}(\gamma-\alpha)+\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \operatorname{tg}(\beta-\gamma)\operatorname{tg}(\gamma-\alpha)\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$!

207. Kakva jednostavna algebarska veza postoji između uglova α, β i γ ako je ispunjena relacija $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$?

208. Dokaži: ako je $\alpha=\beta+\gamma$, onda važi:

a) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma$

b) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$.

5. Trigonometrijske funkcije udvojenog ugla (kuta)

209. Primijeni obrazac $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ na:

a) $\sin 4\alpha$ b) $\sin 6x$ c) $\sin 8\alpha$ d) $\sin 10x$

e) $\sin\alpha$ f) $\sin 3\alpha$ g) $\sin(\alpha+\beta)$ h) $\sin(x-y)$.

210. Primijeni obrazac $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ na:

a) $\cos 4\alpha$ b) $\cos 6x$ c) $\cos 8\alpha$ d) $\cos 10x$

e) $\cos\alpha$ f) $\cos 3x$ g) $\cos(a+b)$ h) $\cos(x-2y)$.

211. Primijeni obrazac $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ na:

a) $\operatorname{tg} 4\alpha$ b) $\operatorname{tg} 6\alpha$ c) $\operatorname{tg} 8x$ d) $\operatorname{tg} 10y$

e) $\operatorname{tg}\alpha$ f) $\operatorname{tg} 3\alpha$ g) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ h) $\operatorname{tg}(x-y)$.

212. Primijeni obrazac $\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$ na:

a) $\operatorname{ctg} 4\alpha$ b) $\operatorname{ctg} 6\alpha$ c) $\operatorname{ctg} 8x$ d) $\operatorname{ctg}\alpha$

e) $\operatorname{ctg} 3x$ f) $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$ g) $\operatorname{ctg}(x-y)$ h) $\operatorname{ctg} 2(a+b-2)$.

213. Izračunaj funkcije ugla 2α ako je:

a) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ b) $\sin\alpha = \dfrac{15}{17}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

c) $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$ d) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$.

214. Zadano je $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\cos\alpha < 0$. Izračunaj:

a) $\sin 2\alpha$ b) $\cos 2\alpha$ c) $\operatorname{tg} 2\alpha$.

215. Izračunaj $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$ ako je:

a) $\sin\alpha = \frac{2a}{a^2+1}$ b) $\cos\alpha = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2ab}{a^2-b^2}$.

216. $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\sin\beta = \frac{1}{2}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$. Nađi $\sin(2\alpha+2\beta)$.

217. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2-\sqrt{3}$. Nađi: $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.

218. Izrazi $\sin 3\alpha$ kao funkciju od $\sin\alpha$.

219. Izrazi $\cos 3\alpha$ kao funkciju od $\cos\alpha$.

220. Izrazi $\operatorname{tg} 3\alpha$ kao funkciju od $\operatorname{tg}\alpha$.

221. Izračunaj $\sin 3\alpha$ ako je $\cos\alpha = \frac{a^2b^2-1}{a^2b^2+1}$.

222. Izračunaj $\cos 3\alpha$ ako je $\sin\alpha = \frac{2abc}{a^2b^2+c^2}$.

223. Zadano je: $\alpha+\beta+\gamma = 180°$, $\alpha = 2\beta$, $\cos\alpha = -\frac{7}{25}$ gdje je $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Izračunaj $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$.

224. Zadano je: $\alpha+\beta+\gamma = 180°$, $\alpha-\beta = 3\gamma$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{3}$ gdje je γ ugao I kvadranta. Izračunaj: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ i $\operatorname{tg}\gamma$.

225. Dokaži:

a) $\sin 4\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha(1-2\sin^2\alpha)$

b) $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$ c) $\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{4\operatorname{tg}\alpha - 4\operatorname{tg}^3\alpha}{1-6\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha}$.

226. Dokaži i upamti identičnosti:

a) $\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ b) $\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

c) $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$ d) $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}$.

227. Primijeni identičnosti iz prethodnog zadatka na:

a) $\sin 4\alpha$, $\cos 4\alpha$, $\operatorname{tg} 4\alpha$, $\operatorname{ctg} 4\alpha$

b) $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

228. Eliminiši t iz sistema: $(a-b)\cos 2t + a\sin 2t = a+b$, $b\sin t - a\cos t = 0$.

229. Dokaži i upamti identičnosti:

a) $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$ b) $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$

c) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$ d) $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}^2\alpha$.

230. Primijeni identičnosti prethodnog zadatka na:

a) $1+\cos\alpha$, $1-\cos\alpha$, $\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$, $\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$

b) $1+\cos 4x$, $1-\cos 4x$, $\dfrac{1-\cos 4x}{1+\cos 4x}$, $\dfrac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}$.

231. Dokaži i upamti identičnosti:

a) $2\cos^2 x = 1+\cos 2x$ b) $2\sin^2 x = 1-\cos 2x$

c) $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$ d) $\operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$.

232. Primijeni identičnosti prethodnog zadatka na:

a) $2\cos^2\dfrac{x}{2}$ b) $2\sin^2\dfrac{x}{2}$ c) $\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}$ d) $\operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{2}$.

Dokaži:

233. a) $\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)+\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha) = \dfrac{2}{\cos 2\alpha}$

b) $\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)-\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha) = 2\operatorname{tg} 2\alpha$.

234. $\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = \left(\dfrac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right)^2$.

235. a) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{1}{\sin 2\alpha}$ b) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \cos 2\alpha$.

236. a) $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$ b) $\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

237. $\dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}+\dfrac{\operatorname{ctg}^3 x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}=\dfrac{2-\sin^2 2x}{\sin 2x}$.

238. a) $\operatorname{tg}(30^\circ+\alpha)-\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)=2\operatorname{ctg}(120^\circ-2\alpha)$

b) $\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha)+\operatorname{tg}(30^\circ-\alpha)=\dfrac{2}{\sin(60^\circ-2\alpha)}$.

239. $1+2\cos 2\alpha=\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$.

240. $(\cos\alpha-\sin\alpha)\cos(45^\circ-\alpha)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha$.

241. a) $\operatorname{ctg} t-2\operatorname{ctg} 2t=\operatorname{tg} t$ b) $\operatorname{tg} t+2\operatorname{tg} 2t+4\operatorname{ctg} 4t=\operatorname{ctg} t$

c) $\operatorname{tg} t+2\operatorname{tg} 2t+4\operatorname{tg} 4t+8\operatorname{ctg} 8t=\operatorname{ctg} t$.

242. Ako je $3\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{tg}\beta$, onda je $\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\dfrac{\sin 2\alpha}{5-\cos 2\alpha}$. — Dokaži!

Dovedi na najjednostavniji oblik izraze:

243. a) $\dfrac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$ b) $\dfrac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}$ c) $(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2\mp\sin 2\alpha$.

244. a) $\cos 2\alpha+\sin^2\alpha$ b) $\cos^2\alpha-\cos 2\alpha$ c) $\cos 2\alpha+2\sin^2\alpha$

d) $2\cos^2\alpha-\cos 2\alpha$.

245. a) $\dfrac{\cos 2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha+1}$ b) $\dfrac{\cos^2\alpha-\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$.

246. a) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha\pm\sin\alpha}\pm\sin\alpha$ b) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha\pm\sin\alpha}-\cos\alpha$.

247. a) $\dfrac{\sin\alpha-\sin^3\alpha}{\sin 2\alpha}$ b) $\dfrac{\cos\alpha-\cos^3\alpha}{\sin 2\alpha}$.

248. a) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1\pm\cos 2\alpha}$ b) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha+\sin^2\alpha}$ c) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha-\cos^2\alpha}$.

249. a) $\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^4\alpha}{\sin^2 2\alpha}$ b) $\dfrac{\cos^2\alpha-\cos^4\alpha}{\sin^2 2\alpha}$.

250. a) $\cos 2\alpha+\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ b) $\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha-\cos 2\alpha$.

251. a) $\sin 2\alpha\,(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha)$ b) $\sin 2\alpha+\sin 2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha$.

252. a) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos 2\alpha}$ b) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\cos 2\alpha}$.

253. a) $\dfrac{2\sin^2\alpha+\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha+\sin 2\alpha}$ b) $\dfrac{2\sin^2\alpha-\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha-\sin 2\alpha}$.

254. a) $\dfrac{(\cos\alpha\pm\sin\alpha)^2+\cos 2\alpha}{2\cos^2\alpha\pm\sin 2\alpha}$ b) $\dfrac{(\cos\alpha\pm\sin\alpha)^2-\cos 2\alpha}{2\sin^2\alpha\pm\sin 2\alpha}$.

255. a) $\dfrac{\sin^2 2\alpha+4\sin^4\alpha}{\sin^2 2\alpha+4\cos^4\alpha}$ b) $\dfrac{4\sin^2\alpha-\sin^2 2\alpha}{4\cos^2\alpha-\sin^2 2\alpha}$

c) $\dfrac{\sin^2 2\alpha-2\sin^2\alpha}{\sin^2 2\alpha-2\cos^2\alpha}$.

256. a) $\dfrac{\sin\alpha\sin 2\alpha}{\cos\alpha-\cos\alpha\cos 2\alpha}$ b) $\dfrac{\cos\alpha\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\sin\alpha\cos 2\alpha}$.

257. a) $\dfrac{\sin^2 2\alpha-4\sin^4\alpha}{\cos 2\alpha}$ b) $\dfrac{4\cos^4\alpha-\sin^2 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

c) $\dfrac{\sin^2 2\alpha-2\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}$.

258. a) $\dfrac{2\sin\alpha\pm\sin 2\alpha}{1\pm 2\cos\alpha+\cos 2\alpha}$ b) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}$

c) $\dfrac{\sin 2\alpha-\sin\alpha}{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}$.

259. a) $\dfrac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\cos 2\alpha}$ b) $\dfrac{1-4\sin^4\alpha}{\cos 2\alpha}-2\sin^2\alpha$

c) $2\cos^2\alpha-\dfrac{4\cos^4\alpha-1}{\cos 2\alpha}$.

260. a) $\cos 2\alpha+\sin^4\alpha$ b) $\cos^4\alpha-\cos 2\alpha$.

261. a) $\dfrac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{3\cos\alpha+\cos 3\alpha}$ b) $\dfrac{\sin 3\alpha+\sin^3\alpha}{\cos 3\alpha-\cos^3\alpha}$ c) $\dfrac{\sin 3\alpha+4\sin^3\alpha}{4\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}$.

262. a) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1$ b) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2-1$

c) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$.

263. a) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$ b) $1-(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)$.

264. a) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$ b) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha$ c) $(1-\operatorname{tg}^2\alpha)(1-\operatorname{ctg}^2\alpha)$.

265. a) $\dfrac{1}{\cos\alpha+\sin\alpha}+\dfrac{1}{\cos\alpha-\sin\alpha}$ b) $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$

c) $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$.

266. $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$.

267. a) $\dfrac{(\cos\alpha+\sin\alpha+1)(\cos\alpha+\sin\alpha-1)}{\cos 2\alpha}$

b) $\dfrac{(\cos\alpha-\sin\alpha+1)(\cos\alpha-\sin\alpha-1)}{\cos 2\alpha}$

268. a) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)$ b) $1-(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)$.

269. $\dfrac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}-\dfrac{\cos^3\alpha+\sin^3\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$.

270. $\dfrac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha-(\sin^5\alpha+\cos^5\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha-(\sin^3\alpha+\cos^3\alpha)}$.

271. $\dfrac{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-(\sin^8\alpha+\cos^8\alpha)}{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)}$.

272. a) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$ b) $\dfrac{\sin^3\alpha+\sin\alpha\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha}$.

273. a) $(1+\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha$ b) $(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha$.

274. a) $\dfrac{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}$ b) $\dfrac{(2+\cos\alpha)^2-\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$.

275. a) $\dfrac{\cos 2\alpha \pm 2\cos\alpha + 1}{\sin 2\alpha}$ b) $\dfrac{2\sin\alpha \mp \sin 2\alpha}{\sin\alpha}$ c) $\dfrac{2\sin\alpha \mp \sin 2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

276. a) $\dfrac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}$ b) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}$.

277. a) $\dfrac{1 - \cos\alpha + \sin\alpha}{1 + \cos\alpha + \sin\alpha}$ b) $\dfrac{1 - \cos\alpha - \sin\alpha}{1 + \cos\alpha - \sin\alpha}$.

278. a) $\dfrac{1 + 2\cos\alpha + \cos 2\alpha}{\sin^2\alpha - (1 - \cos\alpha)^2}$ b) $\dfrac{1 - 2\cos\alpha + \cos 2\alpha}{\sin^2\alpha - (1 + \cos\alpha)^2}$.

279. a) $\dfrac{2\sin\alpha \pm \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + 2\cos\alpha}$ b) $\dfrac{2\sin\alpha \pm \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - 2\cos\alpha + 1}$.

280. a) $\dfrac{\sin\alpha - \sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta - \cos\alpha\sin\beta}$ b) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta + \cos\alpha\sin\beta}$

c) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta - \cos\alpha\sin\beta}$.

281. a) $(1 + \sin\alpha)^2 \pm \cos^2\alpha$ b) $(1 - \sin\alpha)^2 \pm \cos^2\alpha$.

282. a) $\dfrac{2\cos\alpha \pm \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$ b) $\dfrac{1 \mp 2\sin\alpha - \cos 2\alpha}{(1 \pm \sin\alpha)^2 - \cos^2\alpha}$

c) $\dfrac{1 \pm 2\sin\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$.

283. a) $\dfrac{(1 - \sin\alpha)^2 \pm \cos^2\alpha}{(1 + \sin\alpha)^2 \pm \cos^2\alpha}$ b) $\dfrac{1 + 2\sin\alpha - \cos 2\alpha}{1 - 2\sin\alpha - \cos 2\alpha}$

c) $\dfrac{2\cos\alpha - \sin 2\alpha}{2\cos\alpha + \sin 2\alpha}$.

284. Izračunaj vrijednost izraza $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$ ako je $\alpha + \beta + \gamma = 90°$.

285. Uzevši u obzir da uglovi $\dfrac{180°}{7}$, $\dfrac{360°}{7}$, $\dfrac{720°}{7}$ mogu biti uglovi trougla dokaži da je $\cos\dfrac{180°}{7}\cos\dfrac{360°}{7}\cos\dfrac{720°}{7} = -\dfrac{1}{8}$.

286. $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}+\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{1}{\cos 2\alpha}$. — **Dokaži!**

287. Nađi: $\operatorname{tg}2x$ iz jednačine $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0$.

288. Nađi vrijednost izraza:

a) $\dfrac{\sin\alpha}{2-3\cos\alpha}$ ako je $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}$ ako je $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2}{15}$.

6. Trigonometrijske funkcije poluuglova (polukutova)

289. Primijeni obrazac $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ na:

a) $\cos x$ b) $\cos 2\alpha$ c) $\cos\frac{\alpha}{4}$ d) $\cos(a+b)$.

290. Primijeni formulu $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ na:

a) $\sin\alpha$ b) $\sin\frac{x}{4}$ c) $\sin 2x$ d) $\sin(\alpha-\beta)$.

291. Primijeni obrazac $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ na:

a) $\operatorname{tg}\alpha$ b) $\operatorname{tg}2\alpha$ c) $\operatorname{tg}\frac{x}{4}$ d) $\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}$.

292. Nađi trigonometrijske funkcije ugla od 15°.

293. Izračunaj trigonometrijske funkcije ugla od 22°30′.

294. Izračunaj: a) $\sin\frac{\pi}{16}$ b) $\cos\frac{\pi}{16}$.

295. Ako je $\sin\alpha=\frac{24}{25}$, koliko je: a) $\sin\frac{\alpha}{2}$ b) $\cos\frac{\alpha}{2}$?

296. Ako je $\cos\alpha=\frac{7}{18}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, koliko je:

a) $\cos\frac{\alpha}{2}$ b) $\sin\frac{\alpha}{2}$ c) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ d) $\cos\frac{\alpha}{4}$?

297. Kakav znak treba staviti ispred korijena u obrascima $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$, $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ ako ugao iznosi:

a) 100° b) 230° c) 400° d) 600°?

298. Ako je $\cos\alpha=-\frac{119}{169}$, α u III kvadrantu, koliko je:

a) $\cos\frac{\alpha}{2}$ b) $\sin\frac{\alpha}{4}$ c) $\cos\frac{\alpha}{4}$ d) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$?

299. Ako je $\sin\alpha=-\frac{24}{25}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, koliko je:

a) $\sin\frac{\alpha}{2}$ b) $\cos\frac{\alpha}{2}$ c) $\sin\frac{\alpha}{4}$ d) $\cos\frac{\alpha}{4}$?

300. Iz $\sin 750°=\frac{1}{2}$ izračunaj:

a) $\sin 375°$ b) $\cos 375°$ c) $\operatorname{tg} 375°$.

301. Budući da je $\cos 840°=-\frac{1}{2}$, izračunaj:

a) $\cos 420°$ b) $\cos 210°$ c) $\cos 105°$.

302. a) Iz poznate vrijednosti trigonometrijske funkcije $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ izračunaj $\cos 2\alpha$; b) iz $\cos 2\alpha=-\frac{7}{25}$ i $\cos\alpha>0$ izračunaj $\cos\alpha$.

303. a) Iz $\sin\alpha=\frac{12}{13}$ izračunaj $\sin 2\alpha$,

b) iz $\sin 2\alpha=\frac{120}{169}$, $0<2\alpha<\frac{\pi}{2}$ izračunaj $\sin\alpha$.

304. Iz zadane vrijednosti funkcije $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ izračunaj: $\operatorname{tg} 2\alpha$. pa zatim iz nađene vrijednosti za $\operatorname{tg} 2\alpha$ izračunaj $\operatorname{tg}\alpha$.

305. Prethodni zadatak ponovi u slučaju kad je $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

306. Ponovi prethodni zadatak ako je $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{12}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

7. Transformacija proizvoda (umnoška, produkta) trigonometrijskih funkcija u zbir (sumu) ili razliku (diferenciju)

Napiši u obliku zbira (sume) ili razlike sljedeće proizvode (umnoške):

307. a) $\sin\alpha\cos\beta$ b) $\cos\alpha\sin\beta$ c) $\cos\alpha\cos\beta$
d) $\sin\alpha\sin\beta$.

308. a) $\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$ b) $\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$ c) $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$
d) $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$.

309. a) $\sin(\alpha+\beta)\cos\beta$ b) $\cos(\alpha+\beta)\sin\beta$ c) $\cos(\alpha+\beta)\cos\beta$
d) $\sin(\alpha+\beta)\sin\beta$.

310. a) $\sin(\alpha-\beta)\cos\beta$ b) $\cos(\alpha-\beta)\sin\beta$ c) $\cos(\alpha-\beta)\cos\beta$
d) $\sin(\alpha-\beta)\sin\beta$.

311. a) $\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)$ b) $\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)$ c) $\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)$
d) $\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)$.

312. a) $\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)$ b) $\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)$ c) $\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)$
d) $\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)$.

313. a) $\sin\alpha\cos(\beta-\alpha)$ b) $\cos\alpha\sin(\beta-\alpha)$ c) $\cos\alpha\cos(\beta-\alpha)$
d) $\sin\alpha\sin(\beta-\alpha)$.

314. a) $\sin(\alpha+2\beta)\cos(2\alpha+\beta)$ b) $\cos(\alpha+2\beta)\sin(2\alpha+\beta)$
c) $\sin(\alpha+2\beta)\sin(2\alpha+\beta)$.

315. a)

316. a)

317. a)

318. a)
c)

319. a)
c)

315. a) $\sin(\alpha+2\beta)\cos(2\alpha-\beta)$ b) $\sin(\alpha+2\beta)\sin(2\alpha-\beta)$.

316. a) $\cos(\alpha-2\beta)\sin(2\alpha+\beta)$ b) $\cos(\alpha-2\beta)\cos(2\alpha+\beta)$.

317. a) $\sin(\alpha-2\beta)\cos(2\alpha-\beta)$ b) $\cos(\alpha-2\beta)\sin(2\alpha-\beta)$.

318. a) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\gamma-\delta)$ b) $\cos(\alpha+\beta)\sin(\gamma-\delta)$
c) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\gamma-\delta)$.

319. a) $\sin(\alpha-\beta)\cos(\gamma-\alpha)$ b) $\cos(\alpha-\beta)\cos(\gamma-\alpha)$
c) $\sin(\alpha-\beta)\sin(\gamma-\alpha)$.

8. Transformacija trigonometrijskih izraza za logaritmovanje

Dovedi na oblik monoma ove izraze:

320. a) $\sin 65° + \sin 25°$ b) $\sin 65° - \sin 25°$
c) $\cos 70° + \cos 30°$ d) $\cos 42° - \cos 82°$
e) $\sin 75° + \sin 15°$ f) $\cos(\alpha + 45°) - \cos(\alpha - 45°)$.

321. a) $\sin 10° + \sin 20° + \sin 40° + \sin 50°$
b) $\sin 15° + \sin 20° + \sin 70° + \sin 75°$.

Dokaži:

322. a) $\sin 3\alpha - \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos 2\alpha$
b) $\cos 5\alpha + \cos 3\alpha = 2 \cos \alpha \cos 4\alpha$.

323. a) $1 - \sin 2\alpha = 2 \sin^2(45° - \alpha)$ b) $1 + \sin 2\alpha = 2 \cos^2(45° - \alpha)$.

324. a) $\sin \alpha + \sin(\alpha + 2\beta) = 2 \sin(\alpha + \beta) \cos \beta$

b) $\dfrac{\sin \alpha + \sin(\alpha - 2\beta)}{\cos \alpha + \cos(\alpha - 2\beta)} = \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.

325. a) $\dfrac{\sin 3\alpha + \sin \alpha}{\cos 3\alpha + \cos \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$ b) $\dfrac{\cos \alpha - \cos 3\alpha}{\sin \alpha + \sin 3\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

c) $\dfrac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$.

326. a) $\dfrac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}(45° - \alpha)$ b) $\dfrac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2}$

c) $\dfrac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2}} = \sin \alpha$.

327. a) $\dfrac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \operatorname{tg} \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ b) $\dfrac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \beta - \cos \alpha} = \operatorname{ctg} \dfrac{\alpha + \beta}{2}$.

$\sin 3\alpha +$

a) $\sin(30° + \alpha) + \sin(30° - \alpha) = \cos\alpha$

b) $\cos(60° - \alpha) + \cos(60° + \alpha) = \cos\alpha$

c) $\sin(45° + \alpha) + \sin(45° - \alpha) = \sqrt{2}\cos\alpha$

d) $\cos(45° - \alpha) + \cos(45 + \alpha) = \sqrt{2}\cos\alpha.$

a) $\sin(60° + \alpha) - \sin(60° - \alpha) = \sin\alpha$

b) $\cos(30° - \alpha) - \cos(30° + \alpha) = \sin\alpha$

c) $\sin(45° + \alpha) - \sin(45° - \alpha) = \sqrt{2}\sin\alpha$

d) $\cos(45° - \alpha) - \cos(45° + \alpha) = \sqrt{2}\sin\alpha$

e) $\sin(60° + \alpha) + \sin(60° - \alpha) = \sqrt{3}\cos\alpha$

f) $\cos(30° - \alpha) + \cos(30° + \alpha) = \sqrt{3}\cos\alpha$

g) $\sin(30° + \alpha) - \sin(30° - \alpha) = \sqrt{3}\sin\alpha$

h) $\cos(60° - \alpha) - \cos(60° + \alpha) = \sqrt{3}\sin\alpha.$

a) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

b) $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$

c) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

d) $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha\sin\beta.$

a) $\dfrac{\cos(60° - \alpha) - \cos(60° + \alpha)}{\cos(30° - \alpha) + \cos(30° + \alpha)} = \operatorname{tg}\alpha$ b) $\dfrac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\cos^2\beta - \cos^2\alpha} = 1.$

a) $\dfrac{1}{2} + \cos\alpha = 2\cos\left(30° + \dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30° - \dfrac{\alpha}{2}\right)$

b) $\dfrac{1}{2} - \cos\alpha = 2\sin\left(30° + \dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha}{2} - 30°\right).$

a) $1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(45° - \dfrac{\alpha}{2}\right)$ b) $1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(45° - \dfrac{\alpha}{2}\right)$

c) $\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$ d) $\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha\sin^2\dfrac{\alpha}{2}.$

4. a) $\operatorname{ctg}\alpha + \cos\alpha = 2\operatorname{ctg}\alpha\cos^2\left(45° - \dfrac{\alpha}{2}\right)$ b) $\operatorname{ctg}\alpha + \dfrac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}.$

335. $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$.

336. a) $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos(45^\circ - \alpha)$

b) $\sin\alpha + \cos\beta = 2\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - 45^\circ\right)$.

337. a) $1 + \cos\alpha + \sin\alpha = 2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$

b) $1 + \cos\alpha - \sin\alpha = 2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$

c) $1 - \cos\alpha + \sin\alpha = 2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$

d) $\sin\alpha + \cos\alpha - 1 = 2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$.

338. $\operatorname{ctg}^2\beta - \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$.

339. a) $\operatorname{tg}(60^\circ + \alpha) - \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) = 2\operatorname{ctg}(60^\circ - 2\alpha)$

b) $\operatorname{tg}(30^\circ + \alpha) + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) = \frac{2}{\sin(60^\circ + 2\alpha)}$.

340. a) $(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$

b) $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$.

341. $1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha = 4\cos\alpha\cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$.

342. a) $\frac{1-\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\cos\alpha+\sin\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ b) $\frac{1+\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha-1} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

343. $\frac{1-\sin\alpha}{1+\cos\alpha-\sin\alpha} = \frac{\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Dovedi na što jednostavniji oblik:

344. a) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}$ b) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$

c) $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$ d) $\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}$.

345. a) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ b) $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

c) $\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ d) $\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

346. a) $\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos(\alpha+\beta)}$ b) $\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{1-\cos(\alpha+\beta)}$ c) $\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos(\alpha-\beta)}$.

347. a) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{1-\cos(\alpha+\beta)}$ b) $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{1+\cos(\alpha+\beta)}$

c) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{1+\cos(\alpha-\beta)}$ d) $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{1-\cos(\alpha-\beta)}$.

348. a) $\frac{\sin(3\alpha+\beta)+\sin(\alpha+3\beta)}{\sin 2\alpha+\sin 2\beta}$ b) $\frac{\sin(3\alpha-\beta)-\sin(-\alpha+3\beta)}{\sin 2\alpha-\sin 2\beta}$

c) $\frac{\cos(3\alpha+\beta)-\cos(\alpha+3\beta)}{\cos 2\alpha-\cos 2\beta}$ d) $\frac{\cos(3\alpha-\beta)-\cos(-\alpha+3\beta)}{\cos 2\alpha-\cos 2\beta}$

e) $\frac{\cos(3\alpha+\beta)-\cos(\alpha+3\beta)}{\sin 2\alpha-\sin 2\beta}$ f) $\frac{\sin(3\alpha-\beta)-\sin(-\alpha+3\beta)}{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}$.

349. a) $\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}$

b) $\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha-\sin 3\alpha}{1+\cos\alpha-\cos 2\alpha\mp\cos 3\alpha}$ c) $\frac{-\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{1\mp\cos\alpha-\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}$.

350. a) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)}{1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos(\alpha+\beta)}$ b) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)}{1\mp\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}$

c) $\frac{\sin\alpha-\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)}{1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos(\alpha+\beta)}$ d) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha-\beta)}{1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)}$.

351. a) $\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\sin\alpha-\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}$ b) $\frac{\sin\alpha-\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha-\cos 3\alpha}$.

352. a) $\dfrac{\sin\alpha-\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha-\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}$ b) $\dfrac{\sin\alpha-2\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\sin\alpha+2\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}$.

353. a) $\dfrac{\sin\alpha-2\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)}{\sin\alpha+2\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)}$

b) $\dfrac{\cos\alpha+2\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)}{\cos\alpha-2\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)}$.

354. $\dfrac{\sin\alpha+\sin 2\alpha\pm\sin 3\alpha\pm\sin 4\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cos 4\alpha}$.

355. $\dfrac{\sin\alpha+\sin 2\alpha-\sin 3\alpha-\sin 4\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha-\cos 3\alpha-\cos 4\alpha}$.

356. $\dfrac{\sin\alpha-\sin 2\alpha-\sin 3\alpha+\sin 4\alpha}{\cos\alpha\mp\cos 2\alpha\pm\cos 3\alpha-\cos 4\alpha}$.

357. a) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1\pm\operatorname{tg}\alpha}$ b) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1\pm\operatorname{ctg}\alpha}$.

358. a) $\sqrt{1+\sin 2\alpha}$ b) $\sqrt{1-\sin 2\alpha}$.

359. a) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}$

b) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$.

360. a) $\dfrac{1+\cos\alpha-\sin\alpha}{1+\cos\alpha+\sin\alpha}$ b) $\dfrac{1-\cos\alpha-\sin\alpha}{1-\cos\alpha+\sin\alpha}$

c) $\dfrac{1-\cos\alpha-\sin\alpha}{1+\cos\alpha+\sin\alpha}$ d) $\dfrac{1-\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\cos\alpha-\sin\alpha}$.

Dovedi na oblik, koji se može neposredno logaritmovati, izraze:

361. $\dfrac{2\sin\beta-\sin 2\beta}{2\sin\beta+\sin 2\beta}$.

362. a) $\dfrac{2\sin\alpha+\sqrt{3}}{2\cos\alpha+1}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}-2\cos\alpha}{2\sin\alpha+1}$.

363. $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$.

364. a) $\cos^2 2\alpha-\sin^2\alpha$ b) $1-\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)$.

365. a) $1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha$ b) $1+\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}$

c) $1-\sqrt{2}\cos\alpha+\cos 2\alpha$ d) $\cos\alpha+\sin 2\alpha-\cos 3\alpha$.

366. $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha$.

367. $1-\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}$.

368. a) $\frac{1+\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ b) $\frac{\sqrt{2}-\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$.

369. a) $2+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$ b) $2+\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha$.

370. $\frac{1+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}$. **371.** $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha+\frac{1}{\sin 2\alpha}$.

372. $2\sin^2\alpha+\sqrt{3}\sin 2\alpha-1$.

373. $\operatorname{tg}x-1+\sin x(1-\operatorname{tg}x)+\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

374. $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$.

375. $1-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha-\sin^2\beta-\cos^4\alpha$.

376. $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z-\frac{\sin(x+y+z)}{\cos x\cos y\cos z}$.

Dokaži:

377. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$.

378. $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$.

379. Ako je $a\sin\alpha+b\sin\beta=0$ (a i b brojevi po volji), onda je i $(a+b)\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}+(a-b)\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0$.

380. $\cos^3\alpha+\sin^3\alpha+\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=$
$=4\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.

Dokaži da uz uslov $\alpha+\beta+\gamma=180°$ važe relacije:

381. a) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$

b) $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$

c) $\sin\alpha-\sin\beta+\sin\gamma=4\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$

d) $-\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$.

382. a) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}+1$

b) $\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}-1$

c) $\cos\alpha-\cos\beta+\cos\gamma=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}-1$

d) $-\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=4\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}-1$.

383. a) $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

b) $\sin 2\alpha+\sin 2\beta-\sin 2\gamma=4\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$

c) $\sin 2\alpha-\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma$

d) $-\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

384. a) $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1$

b) $\cos 2\alpha+\cos 2\beta-\cos 2\gamma=-4\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma+1$

c) $\cos 2\alpha - \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -4 \sin\alpha \cos\beta \sin\gamma + 1$

d) $-\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -4 \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma + 1.$

385. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma.$

386. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1.$

387. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$

388. $\operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta = 1.$

389. a) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

b) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$

c) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma$

d) $-\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma.$

390. a) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos^2\gamma = 1 - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$

c) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma$

d) $-\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma.$

391. a) $\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} = 1 - 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$

b) $\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\gamma}{2} = 1 - 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$

c) $\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} = 1 - 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

d) $-\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} = 1 - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$

392. a) $\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} = 2 + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$

b) $\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\gamma}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$

c) $\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

d) $-\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

393. a) $\sin^2 2\alpha+\sin^2 2\beta-\sin^2 2\gamma=-2\sin 2\alpha\sin 2\beta\cos 2\gamma$

b) $\sin^2 2\alpha-\sin^2 2\beta+\sin^2 2\gamma=-2\sin 2\alpha\cos 2\beta\sin 2\gamma$

c) $-\sin^2 2\alpha+\sin^2 2\beta+\sin^2 2\gamma=-2\cos 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma$.

394. $\cos^2 2\alpha+\cos^2 2\beta+\cos^2 2\gamma=1-2\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma$.

395. Odredi maksimum funkcije $y=\sin x-\cos x$ u intervalu od 0 do 2π.

396. Ako je $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, onda je $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=$

$=\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{-\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. — Dokaži!

397. $\cos\alpha(\cos\alpha-\cos\beta)+\sin\alpha(\sin\alpha-\sin\beta)=2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$. — Dokaži!

398. Dokaži: ako je $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, onda je:

a) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-1=4\sin\frac{\pi-2\alpha}{4}\sin\frac{\pi-2\beta}{4}\sin\frac{\pi-2\gamma}{4}$

b) $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma=\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma$

c) $\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma=$

$=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

Dovedi na oblik za logaritmovanje:

399. a) $p^2-q^2\sin^2\alpha$, $|p|<|q|$ b) $p^2\sin^2\alpha-q^2\cos^2\alpha$.

400. $\frac{\sin 2\alpha+\sin 4\alpha-\sin 6\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}3\alpha}$.

9. Logaritmi trigonometrijskih funkcija

401. Nađi logaritme sinusa ovih uglova (kutova):

a) $12° 42'$ b) $36° 29'$ c) $57° 56'$ d) $72° 1'$.

402. Nađi logaritme kosinusa uglova:

a) $19° 39'$ b) $67° 4'$ c) $30° 44'$ d) $75° 51'$.

403. Nađi logaritme tangensa uglova:

a) $28° 51'$ b) $42° 11'$ c) $54° 9'$ d) $69° 49'$.

404. Nađi logaritme funkcije kotangens uglova:

a) $14° 10'$ b) $21°$ c) $51° 18'$ d) $65° 50'$.

405. Odredi logaritme sinusa ovih uglova:

a) $24° 11' 7''$ b) $39° 41' 25''$ c) $54° 17' 32''$ d) $68° 7' 5''$.

406. Odredi logaritme funkcije kosinus za uglove:

a) $21° 17' 13''$ b) $43° 49' 30''$ c) $53° 8' 11''$ d) $71° 12' 8''$.

407. Nađi logaritme funkcije tangens uglova:

a) $6° 15' 44''$ b) $28° 49' 15''$ c) $50° 40' 21''$ d) $65° 21' 49''$.

408. Nađi logaritme funkcije kotangens uglova:

a) $24° 13' 51''$ b) $77° 6' 11''$ c) $16° 35' 10''$ d) $50° 15' 20''$.

409. Nađi oštri ugao (šiljasti kut) α ako logaritam njegovog sinusa iznosi:

a) $9{,}34268 - 10$ b) $9{,}92027 - 10$

c) $9{,}96672 - 10$ d) $9{,}82390 - 10$.

410. Nađi oštri ugao α ako logaritam njegovog kosinusa iznosi:

a) $9{,}93680-10$ b) $9{,}82410-10$

c) $9{,}69436-10$ d) $9{,}06374-10$.

411. Odredi oštri ugao α ako logaritam njegovog tangensa iznosi:

a) $9{,}35757-10$ b) $10{,}44169-10$

c) $9{,}76613-10$ d) $10{,}52380-10$.

412. Odredi oštri ugao α ako logaritam njegovog kotangensa iznosi:

a) $10\ 53306-10$ b) $9{,}84200-10$

c) $10{,}04940-10$ d) $9{,}70968-10$.

413. Pomoću logaritama odredi oštri ugao α ako je:

a) $\sin\alpha=\frac{12}{19}$ b) $\cos\alpha=\frac{5}{8}$ c) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{12}$

d) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{31}{6}$ e) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{3}{5}$ f) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{14}{9}$.

414. Odredi ugao α ako je $\sin\alpha=\frac{25\sin 73^\circ 44' 23''}{145}$.

415. Nađi pomoću logaritama:

a) $x=\sin 160^\circ 12'\cdot\cos 295^\circ 38'$ b) $y=\frac{\sin 242^\circ 27'}{\cos 208^\circ 32'}$

c) $z=\frac{\sin 132^\circ 19'\cdot\cos 37^\circ 4'}{\cos 345^\circ 16'}$ d) $v=\frac{\operatorname{tg} 157^\circ 40'}{\operatorname{tg} 305^\circ 50'}$

e) $a=\sqrt[3]{3{,}7\sin 56^\circ 17'}$ f) $b=\sqrt{\frac{\cos 24^\circ 11'}{0{,}0178}}$

g) $c=\sqrt{0{,}5\sin 73^\circ\operatorname{tg} 16^\circ 24'}$ h) $d=\sqrt[3]{\frac{\sin 23^\circ\cos 44^\circ}{\operatorname{tg} 55^\circ 18'}}$

i) $p=\sqrt[3]{\sin^2 72^\circ}$.

10. Trigonometrijske jednačine (jednadžbe) s jednom nepoznatom

Riješi jednačine (jednadžbe):

416. a) $\sin x = 0$ b) $\cos x = 0$ c) $\operatorname{tg} x = 0$ d) $\operatorname{ctg} x = 0$.

417. a) $\sin x = \frac{1}{2}$ b) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ d) $\operatorname{ctg} x = 1$.

418. a) $\sin x = 1$ b) $\cos x = -1$ c) $\operatorname{tg} 2x = 0$ d) $\operatorname{ctg} 3x = 0$.

419. a) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\operatorname{tg} x = 1$ d) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

420. a) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $2\cos x + 1 = 0$

c) $3\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$ d) $\operatorname{ctg} x + \sqrt{3} = 0$.

421. a) $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos 3x = \frac{1}{2}$

c) $\operatorname{tg} 3x = 1$ d) $\operatorname{ctg} 2x = 1$.

422. a) $\sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$ b) $\cos \frac{3x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\sqrt{3}$ d) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

423. a) $\sin (x + 30°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos (x - 10°) = \frac{1}{2}$

c) $\operatorname{tg} (2x + 20°) = 1$.

424. Za koje vrijednosti uglova (kutova) α i β je:

a) $\sin\alpha = \sin\beta$ b) $\cos\alpha = \cos\beta$ c) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$?

Riješi jednačine:

425. a) $\sin x = \sin 20°$ b) $\sin x = \sin(-20°)$

c) $\sin(x - 20°) = \sin 35°$ d) $\sin(x + 10°) = \sin(2x - 5°)$.

426. a) $\sin(x + 20°) = \cos 65°$ b) $\cos(80° - x) = \sin 50°$

c) $\cos x = \cos\left(2x - \frac{\pi}{8}\right)$.

427. a) $\frac{\sin x + 2}{\sin x} = 5$ b) $\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = 3$

c) $\frac{\operatorname{tg} x + 3}{\operatorname{tg} x - 3} = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{2\operatorname{tg} x - 6}$, $\operatorname{tg} x \neq 3$.

428. a) $3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$ b) $\operatorname{tg} x + \sin x = 0$

c) $\operatorname{tg} x = 2\sin x$ d) $\operatorname{ctg} x - 2\cos x = 0$.

429. a) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ b) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

c) $4\sin^2 x - 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})\sin x + \sqrt{6} = 0$

d) $4\cos^2 x - 2(1 + \sqrt{3})\cos x + \sqrt{3} = 0$.

430. a) $\sin x + \cos^2 x = 1$ b) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x - 2 = 0$

c) $3\sin^2 x + 5\cos^2 x = 4$ d) $7\sin^2 x - 3\cos^2 x = 2$

e) $\cos^2 x - \sin^2 x - 0{,}5 = 0$.

431. a) $\sin^2 x - \cos^2 x - 3\sin x + 2 = 0$

b) $3\sin^2 x - 2\cos^2 x - 15\sin x + 12 = 0$

c) $\sin^2 x + 5\cos^2 x + 2\cos x = 3$ d) $\sin^2 x - \cos^2 x - \cos x = 0$.

432. a) $\cos x + \operatorname{ctg} x = 1 + \sin x$ b) $(\cos x + \operatorname{ctg} x)\sqrt{3} = 1 - \sin x$

433. a) $5\operatorname{tg} x + 7\operatorname{ctg} x = 12$ b) $3\operatorname{tg} x + 5\operatorname{ctg} x - 8 = 0$.

434. a) $2\cos^2 2x + 3\cos 2x + 1 = 0$ b) $\operatorname{tg}^2 2x - 2\operatorname{tg} 2x - 3 = 0$

c) $\sin^2 2x - 3\sin 2x + 2 = 0$.

435. a) $4\sin^2 x - 7\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$

b) $2\sin^2 x + \sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$

c) $3\sin^2 x + 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 6$

d) $\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 1$.

436. a) $\operatorname{tg}^2 x - 8\sin^2 x + 3 = 0$ b) $4\sin^2 x - \operatorname{ctg}^2 x = 1$

c) $\cos^2 x - \sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x = \frac{5}{6}$.

437. a) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$ b) $\sin x + \cos x = 1$

c) $\cos x - \sin x = 1$ d) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

438. a) $\sin 2x - \cos 2x = 1$ b) $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$.

439. Uz koji uslov ima jednačina $a\cos x + b\sin x = c$ rješenje? Nađi ta rješenja!

440. a) $3\operatorname{ctg}^2 x - \frac{1}{\sin^2 x} = 1$ b) $3\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} = 1$.

441. a) $\frac{3}{\cos^4 x} + 8 = \frac{10}{\cos^2 x}$ b) $\frac{1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{ctg}\frac{x}{2}} = 2\sin\frac{x}{2}$.

442. a) $\frac{\sin x + 2\cos x}{4\sin x - \cos x} = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}}$ b) $\frac{\sin x + 2}{2\cos x + 1} = \frac{\cos x + 2}{2\sin x + 1}$.

443. a) $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$ b) $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$, $\sin x \neq 0$.

444. a) $\cos x + \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x \sin x$, $\cos x \neq 0$ b) $\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x = -1$.

445. a) $\sin x + \operatorname{tg} x = 1 + \cos x$ b) $(\sin x + \operatorname{tg} x)\sqrt{3} = 1 + \cos x$.

446. a) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$, $\cos x \neq 0$

b) $\cos x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, $\cos x \neq 0$.

447. $\operatorname{tg}^2 x + 4 \sin^2 x = 3$.

448. $\sin^2 x (\operatorname{tg} x + 1) = 3 \sin x (\cos x - \sin x) + 3$.

449. a) $\sin (60^\circ + x) = 2 \sin (60^\circ - x)$ b) $\cos (30^\circ - x) = 2 \cos (30^\circ + x)$.

450. $2 \operatorname{ctg} x - (\cos x + \sin x)\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}\right) = 0$.

451. a) $\cos 2x = \sin x$ b) $\cos 2x = \cos x$
c) $\cos 2x = -\sin x$ d) $\cos 2x = -\cos x$.

452. a) $\sin 2x = 2 \sin x$ b) $\sin 2x = 2 \cos x$
c) $\sin 2x = \operatorname{ctg} x$ d) $\sin 2x = \operatorname{tg} x$.

453. a) $\sin 2x = 2 \sin^2 x$ b) $\sin 2x = 2 \cos^2 x$
c) $3 \cos 2x = 2 \cos^2 x$ d) $3 \cos 2x - 2 \sin^2 x = 0$.

454. $\sin (x + 30^\circ) + \cos (x + 60^\circ) = 1 - \cos 2x$.

455. a) $\sin 2x - 12 (\sin x - \cos x) + 12 = 0$
b) $(\cos x - \sin x)^2 = \sin 2x$ c) $\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x$.

456. a) $\cos 2x = \cos x - \sin x$ b) $\cos 2x = \cos x + \sin x$.

457. a) $\cos 2x = (\sin x + \cos x) \cos (\alpha + x)$
b) $\cos 2x = (\cos x - \sin x) \cos (\alpha - x)$
c) $\cos 2x = (\cos x + \sin x) \sin (\alpha + x)$
d) $\cos 2x = (\cos x - \sin x) \sin (\alpha - x)$.

458. $\cos x + \sin x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$.

459. a) $2 \cos 2x = \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x$ b) $2 \sin 2x = \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x$.

460. a) $1 - \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \cos 2x$ b) $2 + \cos x = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

461. a) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos 2x} = 1$ b) $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2$.

462. a) $\operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg} x = -1, \quad \operatorname{tg} x \neq 0, \quad \operatorname{tg} x \neq \pm 1$

b) $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 2x = \sqrt{3} + \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{tg} x \neq 0.$

463. a) $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} 2x = \operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg} x, \quad \operatorname{tg} x \neq 0$

b) $\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x} - \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x} = \dfrac{8}{3}, \quad \operatorname{tg} x \neq 0.$

464. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x, \quad \operatorname{tg} x \neq \pm 1, \quad \operatorname{tg} x \neq \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

465. $\operatorname{tg} 2x = (m+2) \operatorname{tg} x.$ — Diskutuj!

466. $1 + \dfrac{2}{\sin x} = -\dfrac{1}{2\cos^2 \dfrac{x}{2}}.$

467. a) $\sin 3x = 4 \sin x \cos 2x$ b) $\cos 4x = -2\cos^2 x.$

468. a) $\sin^2 x + \cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\sin^2 x} = \dfrac{29}{3}$

b) $\sin^2 x + \cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\sin^2 x} = 7.$

469. $\dfrac{1}{\cos x} + 1 = \sin(\pi - x) - \cos x \operatorname{tg} \dfrac{\pi - x}{2}.$

470. $1 + \sin 2x \cos x - \sin x = 1 - 2\sin^2 x.$

471. a) $\sin 2x + \sin x = 1$ b) $\sin^2 x - \sin 2x - 1 - 2\cos x$

c) $\sin 2x + 2\cos^2 x - 2\cos x = 0$ d) $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin x.$

472. $\sin x - \cos x = 2 \sin \dfrac{x}{2} - 1.$

473. $\sin^2 2x - \sin^2 x = \dfrac{1}{2}.$

474. $\dfrac{\cos^2 x + \dfrac{1}{2}\sin 2x}{\cos^2 x - \dfrac{1}{2}\sin 2x} = \dfrac{\sqrt{3}}{4 - 2\sqrt{3}} \quad (\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x); \quad \sin x \neq 0, \quad \cos x \neq 0, \quad \sin x \neq \cos x.$

475. $\sin^2 x + \sin x \cos x = 1.$

476. a) $4 \sin 2x - 5 \sin^2 x - 3 \cos^2 x = 0$

b) $3 \sin^2 x + 3 \cos^2 x = 2\sqrt{3} \sin 2x$

c) $5 \cos 2x = 3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x$

d) $\sin^2 x + \sin 2x - \cos^2 x = 1.$

477. a) $\cos 2x = 9 (\cos x - \sin x)^2$ b) $\cos 2x = 0{,}3 (\cos x + \sin x)^2.$

478. a) $\cos 2x = (1{,}6 \cos x + 0{,}6 \sin x)(\cos x - \sin x)$

b) $\cos 2x = (8 \cos x - 7 \sin x)(\cos x - \sin x).$

479. a) $\sin 2x = \cos x \sin (30° + x)$ b) $\sin 2x = \sin x \sin (60° + x).$

480. a) $\dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x} = 16$ b) $\dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{3}{\cos^2 x} = 8$

c) $\dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{2}{\sin x \cos x} = 8.$

481. $2 \sin 3x - 3 \sin 2x + 6 \sin^2 x + 8 \sin^3 x = 0.$

482. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$

483. $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x.$

484. a) $\sin 3x = \cos 2x$ b) $\sin (x - 60°) = \cos (x - 30°).$

485. a) $\cos x + \cos 2x = 0$ b) $\cos 3x + \cos x = 0$

c) $\sin 3x + \sin x = 0$ d) $\sin (60° - x) - \sin x = 0.$

486. a) $\sin^2 4x - \sin^2 2x = 0$ b) $\sin^2 5x - \sin^2 2x = 0.$

487. a) $\sin 6x + \cos 4x = \sin \left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

b) $\sin 4x + \cos 2x = \sin \left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

c) $\sin ax + \cos bx = \sin \left(\dfrac{a-b}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right).$

488. $\sin x + \cos x = (\sin x - \cos x)^2$.

489. a) $\sin 2x + \sin 3x = \sin x$ b) $\sin 7x + \sin x = \sin 4x$

c) $\sin 4x - \sin 2x = \sin x$

d) $\sin(x+\alpha) - \sin(x-\alpha) = \sqrt{3}\sin\alpha$, $\sin\alpha \neq 0$.

490. $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$.

491. $\cos nx + \cos(n-2)x = \cos x$.

492. a) $\sin 4x + \sin x = \sin 3x + \sin 2x$

b) $\sin 9x + \sin 3x = \sin 8x + \sin 4x$

c) $\sin 9x - \sin 3x = \sin 8x - \sin 4x$.

493. a) $\cos 4x + \cos x = \cos 3x + \cos 2x$

b) $\cos 2x + \cos 6x = \cos 4x + \cos 8x$

c) $\cos 2x - \cos 6x = \cos 4x - \cos 8x$.

494. a) $\sin 2x + \cos 2x = \sin 3x + \cos 3x$

b) $\sin 10x - \sin 6x = \cos 6x - \cos 2x$

c) $\sin(x+\alpha) + \cos(x+\alpha) = \sin(x-\alpha) + \cos(x-\alpha)$.

495. a) $\sin x + \sin 2x = \cos 3x + \cos 4x$

b) $\sin 3x - \sin 9x = \cos 5x + \cos 7x$

c) $\cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 7x)$

d) $\sin 3x + \sin x = 1 + \cos 2x$

e) $\sin 5x - \sin 3x = \cos 2x - 1$.

496. a) $\sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0$

b) $\sin 3x + \sin 2x - \sin x = 0$

c) $\sin 3x - \sin 2x - \sin x = 0$.

497. a) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

b) $\cos 3x + \cos 2x + \cos x + 1 = 0$

c) $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$

d) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$.

498. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos 3x.$

499. $\sin^3 x+\sin^3 2x+\sin^3 3x=(\sin x+\sin 2x+\sin 3x)^3.$

500. $\sin 5x+\sin 4x+2\sin 3x+\sin 2x-\sin x=0.$

501. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=4\cos\frac{x}{2}\cos x\cos\frac{3}{2}x.$

502. $\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} 4x+\operatorname{tg} 5x=0.$

503. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} 3x=0.$

504. a) $\cos^3 x-\sin^3 x=\cos 2x$ b) $\cos^3 x+\sin^3 x=\cos 2x.$

505. a) $\sin^3 x+\cos^3 x-\sin x-\cos x=0$

b) $\sin^3 x+\cos^3 x=1-\frac{1}{2}\sin 2x.$

506. $\sin^4 x+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}.$

507. a) $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{3}{4}$ b) $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}$

c) $\sin^4\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}=\frac{5}{8}.$

508. a) $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5\sqrt{3}}{12}\sin 2x$

b) $\sin^4 x+\cos^4 x=\cos 2x$ c) $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{4}\cos 2x.$

509. $\sin^5 x-\cos^5 x=\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x},\quad \cos x\neq 0,\quad \sin x\neq 0.$

510. a) $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{7}{16}$ b) $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{1}{4}.$

511. a) $\cos^6 x-\sin^6 x=\frac{13}{16}\cos 2x$ b) $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{7}{8}\cos 2x.$

512.

513.

514.

515.

516.

517.

518.

519.

520.

521.

522.

523.

512. $\cos^8 x - \sin^8 x = \frac{5}{8}\cos 2x.$

513. a) $\sin^8 x + \cos^8 x = 1$ b) $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{41}{128}$

c) $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{32}.$

514. $\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{16}\cos^4 2x.$

515. $\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x+\pi}{2}}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x+\pi}{2} \neq 0.$

516. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right).$

517. $\frac{\sin x}{\sin(30^\circ + x) + \sin(30^\circ - x)} = 1 + \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + 45^\circ\right) - \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right).$

518. $\frac{\operatorname{tg}(x+45^\circ) + \operatorname{tg}(x-45^\circ)}{2} = \operatorname{tg}(x-45^\circ)\operatorname{tg}(x+45^\circ)\operatorname{tg} x.$

519. $\operatorname{tg}(x-45^\circ)\operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+45^\circ) = \frac{4\cos^2 x}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}\frac{x}{2}}.$

520. $\frac{\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x} - 2\sin(45^\circ + x)\sin(45^\circ - x) = 0.$

521. $1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\cos^2 x(\sin 2x - \cos 2x \operatorname{tg} x) = \cos^4 x - \sin^4 x.$

522. $\frac{1}{\cos^2 x} - \left(\cos x + \sin x \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x-30^\circ) + \cos(60^\circ - x)}{\cos x}.$

523. $\frac{\sin(60^\circ + x) - \sin(60^\circ - x)}{2} = \frac{\operatorname{tg} x}{(1+\operatorname{tg}^2 x)^2} + \frac{\operatorname{ctg} x}{(1+\operatorname{ctg}^2 x)^2}.$

524. $\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 2x}{4\cos^2 x}=\sin(x+30^\circ)\sin(x-30^\circ),\quad \cos x\neq 0.$

525. $[\cos x-\sin(x-\pi)]^2+1=\dfrac{2\sin^2 x\cos^2 x}{1-\cos^2 x},\quad \sin x\neq 0.$

526. $1-\cos^2 2x=\sin 3x-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right).$

527. $1+\sin x+\cos x=2\cos\left(\dfrac{x}{2}-45^\circ\right).$

528. $\sin^3 x(1+\operatorname{ctg} x)+\cos^3 x(1+\operatorname{tg} x)=\cos 2x.$

529. a) $\cos 3x\cos^3 x+\sin 3x\sin^3 x=0$

b) $\sin^3 x\cos 3x+\sin 3x\cos^3 x=0{,}375.$

530. $8\sin^6 x+3\cos 2x+2\cos 4x+1=0.$

531. $2-(7+\sin 2x)\sin^2 x+(7+\sin 2x)\sin^4 x=0.$

532. $\sin^2 x(\operatorname{tg} x+1)=3\sin x(\cos x-\sin x)\div 3.$

533. $2\operatorname{tg} 3x-3\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg}^2 2x\operatorname{tg} 3x.$

534. $(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x)^2-5=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-2x\right).$

535. $\cos\dfrac{\pi x}{31}\cos\dfrac{2\pi x}{31}\cos\dfrac{4\pi x}{31}\cos\dfrac{8\pi x}{31}\cos\dfrac{16\pi x}{31}=\dfrac{1}{32}.$

536. $\dfrac{1}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x}.$

537. $1-\sin 5x=\left(\cos\dfrac{3x}{2}-\sin\dfrac{3x}{2}\right)^2.$

538. $1-\cos(\pi-x)+\sin\dfrac{\pi+x}{2}=0.$

539. $(\sin x+\cos x)\sqrt{2}=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x.$

540. Dokaži da jednačina $(\sin x+\sqrt{3}\cos x)\sin 4x=2$ nema rješenja.

541. $(\cos 4x-\cos 2x)^2=\sin 3x+5$.

542. $32\cos^6 x-\cos 6x=1$.

543. $\sin 5x+\sin x+2\sin^2 x=1$.

544. $2\left[1-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\right]=\sqrt{3}\ \operatorname{tg}\frac{\pi-x}{2}$.

545. $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos x}=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}-1$.

546. a) $\sin x\sin 7x=\sin 3x\sin 5x$

b) $\cos x\sin 7x=\cos 3x\sin 5x$

c) $\sin x\sin 2x\sin 3x=\frac{1}{4}\sin 4x$.

547. $(1+\cos 4x)\sin 4x=\cos^2 2x$.

11. Trigonometrijske jednačine (jednadžbe) sa dvije nepoznate

Riješi sisteme jednačina:

548. $\sin x + \cos y = 0, \quad \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}$.

549. a) $\begin{cases} x - y = \frac{2\pi}{3} \\ \sin x + \sin y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = \frac{2\pi}{3} \\ \sin x - \sin y = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = \pi \\ \sin x + \sin y = \sqrt{3}. \end{cases}$

550. a) $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} \\ \cos x + \cos y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 0 \\ \cos x - \cos y = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = \frac{7\pi}{6} \\ \sin x + \cos y = 1. \end{cases}$

551. a) Nađi rješenja sistema $\sin x + \sin y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $\cos x + \cos y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ koja zadovoljavaju uslov $0° < x < 180°$, $0° < y < 180°$;

b) isto u zadatku $\sin x - \sin y = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, $\cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

552. a) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 5 \\ \operatorname{tg}(x+y) = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 3 \\ \operatorname{tg}(x-y) = \frac{1}{3}. \end{cases}$

553. $\cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$, $\cos 2x + \cos 2y = \frac{1}{2}$.

554. a) $\begin{cases} x - y = 60° \\ \cos^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{4} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 150° \\ \cos^2 x - \cos^2 y = \frac{1}{4}. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 150° \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{7}{4} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y = 45° \\ \sin^2 x - \sin^2 y = \frac{3}{2}. \end{cases}$

555. a) $\begin{cases} x+y=75^\circ \\ \cos x \cdot \cos y=\dfrac{\sqrt{6}}{4} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{2} \\ \sin x \cdot \sin y=\dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{6} \\ \sin x \cdot \cos y=\dfrac{3}{4} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{6} \\ \cos x \cdot \cos y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$

556. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} y=1+\sqrt{3}$.

557. a) $x+y=\dfrac{\pi}{4}$, $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1$

b) $x+y=\dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

c) $x-y=\dfrac{\pi}{6}$, $\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

558. a) $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{3} \\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{3} \\ \dfrac{\cos x}{\cos y}=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

559. Odredi uglove x i y prvog kvadranta koji zadovoljavaju jednačine: $x:y=2:1$, $\cos x:\cos y=1:\sqrt{3}$.

560. Odredi nepoznate x i y iz sistema $x+y=\dfrac{2\pi}{3}$, $\sin x-\sin y=\sin\alpha$.

561. $\sin x \sin y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

562. $\sin^2 x=1+\sin x \sin y$, $\cos^2 x=1+\cos x \cos y$.

563. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1$, $\cos x \cos y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

564. $\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1}{2}$, $\cos x \cos y=\dfrac{1}{4}$.

565. Nađi sva rješenja sistema $\sin(x+y)=0$, $\sin(x-y)=0$ koja zadovoljavaju uslov $0\leqslant x\leqslant\pi$, $0\leqslant y\leqslant\pi$.

566. $\sin x+\sin y=\sin(x+y)$, $|x|+|y|=1$.

567. Riješi: $8\cos x\cos y\cos(x-y)+1=0$, $x+y=a$ i ispitaj za koje vrijednosti od a sistem ima rješenje.

568. Nađi $\cos(x+y)$ ako x i y zadovoljavaju sistem jednačina

$\sin x+\sin y=a$, $\cos x+\cos y=b$.

569. Nađi $\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}2y$ ako x i y zadovoljavaju sistem

$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=a$, $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=b$.

12. Trigonometrijske nejednačine (nejednadžbe)

Riješi nejednačine:

570. a) $\sin x > 0$ b) $\sin x < 0$ c) $\cos x > 0$ d) $\cos x < 0$.

571. a) $\sin x > \frac{1}{2}$ b) $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\cos x \leqslant -\frac{1}{2}$.

572. a) $\sin 2x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos 2x < \frac{1}{2}$ c) $\sin 3x \leqslant -\frac{1}{2}$

d) $\cos 3x < \frac{1}{2}$ e) $\sin\frac{x}{2} < \frac{1}{2}$ f) $\sin\frac{2x}{3} > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

573. Riješi simultane sisteme nejednačina:

a) $\sin x > 0, \cos x > \frac{1}{2}$; b) $\sin x > 0, \cos x < \frac{1}{2}$;

c) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\sin x < -\frac{1}{2}, \cos x > -\frac{1}{2}$.

574. Riješi simultani sistem $\sin x \cdot \cos x > 0$, $\operatorname{tg} x < 1$.

575. Odredi sve vrijednosti od x za koje je zadovoljena nejednačina $2\sin^2 x - 3\sin 2x - 2\cos 2x > 4$.

576. Odredi vrijednosti od x u intervalu od $0°$ do $360°$ za koje je $4\sin^2 x - 2(1+\sqrt{3})\sin x + \sqrt{3}$: a) pozitivan, b) negativan.

577. Odredi uglove x u intervalu od 0 do 2π za koje je trinom $4\cos^2 x - 2(1+\sqrt{2})\cos x + \sqrt{2}$: a) veći od nule, b) manji od nule.

Riješi nejednačine:

578. $2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x < 2$.

579. $\sin\varphi + \cos\varphi > 1$.

580. a) $\sin\varphi\cos\varphi > 0$ b) $\sin\varphi\cos\varphi < 0$.

581. a) $\sin\varphi - 2\sqrt{3}\cos^2\varphi > 0$ b) $2\sin^2\varphi - 3\cos\varphi < 0$

c) $2\sin^2\varphi + 3\cos\varphi < 0$ d) $2\sin^2\varphi - \sqrt{2}\cos\varphi > 0$.

582. Nađi u intervalu od 0 do π vrijednosti od x za koje je trinom $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + \sqrt{3}$: a) pozitivan, b) negativan.

583. $\dfrac{\operatorname{tg} x + 1}{4\sin^2 x - 3} < 0,\ 0 < x < 2\pi$.

584. a) $\dfrac{3\sin x - 2}{4\sin^2 x - 1} < 1$ b) $\dfrac{3\cos x - 2}{4\cos^2 x - 1} < 1$.

585. a) $\dfrac{1-\cos x}{1-2\cos x} < \dfrac{1+\cos x}{1-4\cos^2 x}$ b) $\dfrac{1-\sin x}{1-2\sin x} < \dfrac{1+\sin x}{1-4\sin^2 x}$.

586. Za koje vrijednosti od x između 0 i 2π postoji nejednačina $\cos x - \sin x - \cos 2x > 0$?

587. Nađi nepoznatu x iz intervala od 0 do 2π za koju je zadovoljen sistem nejednačina: $(\operatorname{tg} x - 1)(\sin x + 1) < 0$ (1)
$4\sin^2 x - 2(\sqrt{3}+1)\sin x + \sqrt{3} > 0$ (2).

588. Riješi $\cos^3 x \cdot \cos 3x - \sin^3 x \cdot \sin 3x > \dfrac{5}{8}$.

589. Za koje vrijednosti od x je $4\sin^2 x + 3\operatorname{tg} x - \dfrac{2}{\cos^2 x} > 0$?

590. Dokaži da je $(1-\operatorname{tg}^2 x)(1-3\operatorname{tg}^2 x)(1+\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x) > 0$ za sve vrijednosti od x za koje lijeva strana ima smisla.

591. Dokaži da postoji nejednakost $(\operatorname{ctg}^2 x - 1)(3\operatorname{ctg}^2 x - 1)(\operatorname{ctg} 3x \operatorname{tg} 2x - 1) \leqslant -1$ za sve vrijednosti za koje lijeva strana ima smisla.

592. Dokaži: ako su α, β, γ uglovi trougla, onda je

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8}.$$

593. Ako je $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, onda je $\cos\sin\varphi>\sin\cos\varphi$. — Dokaži!

594. Dokaži da je $\operatorname{tg}^2(\vartheta-\varphi)\leqslant\frac{(n-1)^2}{4n}$ $(n>0)$ ako je $\operatorname{tg}\vartheta=n\operatorname{tg}\varphi$.

595. Dokaži da je $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}>1+\operatorname{ctg}\varphi$ za $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$.

13. Rješavanje pravouglog trougla (pravokutnog trokuta) pomoću logaritama

Napomena: katete pravouglog trougla označujemo sa a i b a njima suprotne uglove sa α i β; h je hipotenuzina visina; p i q su projekcije kateta na hipotenuzu.

Riješi pravougli trougao (pravokutni trokut) ako je zadano:

596. a) $a = 5$, $\alpha = 22° 37' 12''$ b) $b = 24$, $\beta = 73° 44' 23''$
c) $a = 11$, $\beta = 79° 36' 40''$ d) $b = 99$, $\alpha = 11° 25' 16''$.

597. a) $c = 17$, $\alpha = 28° 4' 21''$ b) $c = 29$, $\beta = 46° 23' 50''$
c) $c = 65$, $\alpha = 14° 15'$ d) $c = 85$, $\beta = 64° 56' 33''$

598. a) $a = 3$, $b = 4$ b) $a = 33$, $b = 56$
c) $a = 48$, $c = 73$ d) $b = 45$, $c = 53$.

599. a) $c = 10$, $a:b = 3:4$ b) $a = 10$, $b:c = 12:13$
c) $b = 48$, $a:c = 7:25$ d) $c = 68$, $b:a = 15:8$.

600. a) $a = 12$, $\alpha = 36° 52' 11''$ b) $h = 12$, $\beta = 53° 7' 49''$.

601. a) $p = 9$, $\alpha = 36° 52' 11''$ b) $q = \frac{576}{25}$, $\alpha = 16° 15' 37''$
c) $p = \frac{64}{17}$, $\beta = 61° 55' 39''$.

602. a) $h = \frac{24}{5}$, $p:q = 9:16$ b) $h = \frac{60}{13}$, $p:q = 25:144$.

603. a) $P = 210$, $\alpha = 43° 36' 10''$ b) $P = 924$, $\beta = 59° 29' 23''$.

604. a) $P = 84$, $a = 7$ b) $P = 2340$, $b = 72$.

605. a) $c-a=k, \beta$ b) $c-a=9,\ \beta=61^\circ 55' 39''$
c) $c-a=k, \alpha$ d) $c-a=25,\ \alpha=41^\circ 6' 44''$.

606. a) $c-b=2,\ \beta=67^\circ 22' 48''$ b) $c-b=9,\ \alpha=30^\circ 30' 37''$.

607. a) $a+b=k,\ \alpha$ b) $a+b=31,\ \alpha=16^\circ 15' 37''$
c) $a+b=k,\ \beta$ d) $a+b=41,\ \beta=46^\circ 23' 50''$.

608. a) $b-a=23,\ \alpha=18^\circ 55' 29''$ b) $a-b=7,\ \alpha=48^\circ 53' 16''$.

609. Riješi pravougli trougao u kome je zadano $a+b+c=2s$ i ugao α.

610. Riješi pravougli trougao u kome je zadano $a+b-c=k$ i ugao α.

611. a) Riješi pravougli trougao u kome je zadano $a+h=k$ i ugao α,
b) $a+h=27,\ \alpha=36^\circ 52' 12''$.

612. Za pravougli trougao važi relacija $\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}>\frac{2ab}{c^2}$. – Dokaži!

613. Ako su stranice pravouglog trougla tri uzastopna cijela broja a ugao nasuprot najkraće stranice α, onda je $(1-\sin\alpha)\sin\alpha-(1-\cos\alpha)\cos\alpha=\frac{1}{2}\cos\alpha$. – Dokaži!

Riješi jednakokraki trougao (istokračni trokut) ako je zadano (vidi sl. 1 na strani 16).

614. a) $b=5,\ \beta=53^\circ 7' 48''$ b) $b=25,\ \alpha=32^\circ 31' 14''$.

615. a) $a=40,\ \alpha=87^\circ 12' 20''$ b) $a=72,\ \beta=64^\circ 56' 33''$.

616. a) $a=16,\ b=17$ b) $a=12,\ b=10$.

617. Nađi obrasce za izračunavanje nepoznatih stranica, uglova i površine jednakokrakog trougla (istokračnog trokuta) u kome je poznato:
a) P, α b) P, β c) h, α d) h, β e) P, h f) P, a
g) $a+2b=k, \beta$ h) $a+2b=k, \alpha$ i) $a+h=k, \beta$.

618. Kod jednakokrakog trougla je zadano h i α: nađi visinu h_b koja pada na krak trougla.

619. Odredi visinu h_b jednakokrakog trougla u kome je poznato:

a) P, β b) P, α.

N a p o m e n a : u pravilnom poligonu (mnogouglu, mnogokutu) koji ima n stranica označujemo sa a_n stranicu, sa P_n površinu; R je poluprečnik opisane kružnice a r_n upisane.

620. U pravilnom poligonu tražimo nepoznate od veličina r_n, R, a_n i P_n ako je zadano:

a) $n=5$, R b) a_{10} c) r_{12} d) P_{15}.

621. Odredi površinu kružnog prstena (vijenca) koji obrazuju upisana i opisana kružnica poligona čija je stranica a.

622. Dijagonale pravougaonika (pravokutnika) sijeku se pod uglom $\varphi = 97° 46' 32''$. Stranica koja leži nasuprot toga ugla je $a = 55$. Kolika je druga stranica?

623. Dijagonale pravougaonika sijeku se pod uglom $\varphi = 92° 47' 40''$. Kolike su stranice ako je dijagonala $d = 58$?

624. Dijagonale pravougaonika površine P sijeku se pod uglom φ. Kolike su stranice pravougaonika?

625. Izrazi površinu pravougaonika pomoću njegovog obima (opsega) $2s$ i ugla među dijagonalama φ.

626. Pod kojim uglom α vidimo krug poluprečnika (polumjera) $r = 36$ iz tačke čije je centralno rastojanje $d = 85$?

627. Izrazi površinu romba pomoću njegovog ugla α i poluprečnika r upisane mu kružnice.

628. Neparalelne stranice trapeza su $b = 33$ i $d = 56$. Ako se one produže, sijeku se pod pravim uglom. Koliki su uglovi trapeza?

629. Osnovice jednakokrakog (istokračnog trapeza) su $a = 6$, $c = 2$ a površina $P = 8\sqrt{3}$. Izračunaj krak b i ugao α na osnovici.

630. Pri visini Sunca $\alpha = 10° 23' 20''$ antenski stub baca sjenu dužine 60 m. Kolika je visina stuba?

631. Koliko stepeni (stupnjeva) iznosi visina Sunca nad horizontom ako predmet visine 36 m baca sjenu dužine 77 m?

632. Iz razdaljine $d = 48$ m vidi se vrh tornja pod uglom elevacije $\alpha = 16° 15' 37''$. Kolika je visina tornja?

633. Iz vrha svjetionika vidi se brodić na pučini mora pod depresionim uglom $\alpha = 42° 4' 30''$. Kolika je prostorna udaljenost brodića ako se vrh svjetionika nalazi na visini od 130 m iznad nivoa mora? Kolika je horizontalna udaljenost?

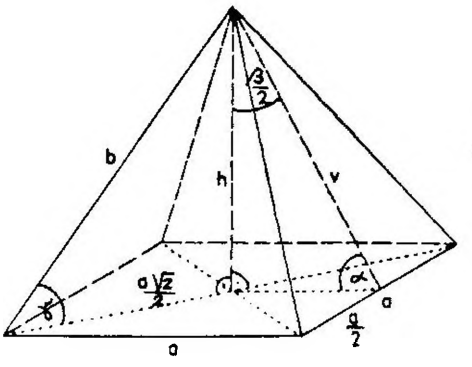
634. Iz visine $h = 16$ m vidi se podnožje tornja pod uglom depresije $\alpha = 11° 25' 16''$ a njegov vrh pod uglom elevacije $\beta = 16° 15' 37''$. Kolika je visina tornja?

635. Osnovnom ivicom (bridom) kocke položena je ravan (ravnina) pod nagibnim uglom α prema bazi. Površina nastalog presjeka je P. Izračunaj zapreminu (volumen) kocke kao funkciju od P i α.

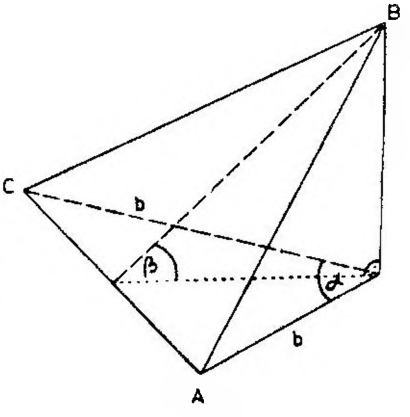
636. Nađi obrasce za površinu i zapreminu pravilne četvorostrane piramide ako je zadano (vidi sl. 2):

a) a, α b) a, β c) h, α

d) v, α e) b, γ. Nađi zapreminu.



Sl. 2



Sl. 3

637. Baza piramide je jednakokraki trougao (istokračni trokut) čiji su kraci b a ugao među njima α. Vrh piramide leži na normali (okomici) na bazu kroz vrh ugla α a nagibni ugao bočne strane ABC prema bazi je β (sl. 3). Izračunaj zapreminu piramide.

638. Baza piramide je pravougaonik. Bočne ivice (bridovi) s nagnute su prema bazi za ugao α. Kolike su osnovne ivice a i b ako je zapremina piramide V?

639. Zadana je zapremina (volumen) V pravilne četvorostrane piramide i nagibni ugao α njezine bočne ivice prema bazi. a) Kolika je zapremina maksimalne kupe (stošca) koja se može izrezati iz piramide? b) Koliki je poluprečnik baze te kupe?

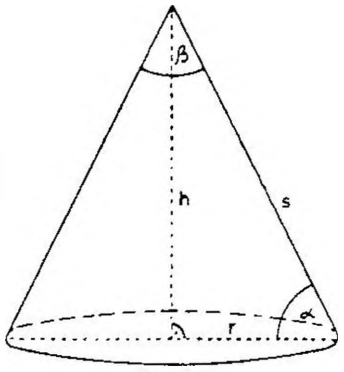
640. Kosi valjak ima osu a nagnutu prema bazi (kružnoj) poluprečnika r pod uglom α. Kolika je zapremina valjka?

641. Karakterističan osovinski presjek kosog valjka je romb površine P i ugla α. Nađi obrazac za izračunavanje zapremine valjka.

642. Nađi obrasce za izračunavanje površine i zapremine uspravne kupe (stošca) ako je zadano (vidi sl. 4):

a) r, α b) r, β c) s, α

d) s, β e) h, α f) h, β.



Sl. 4

643. Koliki ugao sa bazom zatvara izvodnica uspravne kupe zapremine V ako je poluprečnik baze r? Uzmi specijalno $V = 12\pi$, $r = 3$.

644. Kod uspravne kupe poznata je površina P osovinskog presjeka i ugao α na vrhu. Kolika je površina i zapremina kupe?

645. Koliki je omotač (plašt) uspravne kupe ako se zna njezina zapremina V i nagibni ugao izvodnice prema bazi α.

646. Pravougli trougao zadanog ugla α rotira oko hipotenuze. Kolika je kateta nalegla (priležeća) uglu α ako je zapremina tijela koje nastaje rotacijom V?

647. Nad krugom poluprečnika r dižu se a) na istu stranu, b) na razne strane dvije uspravne kupe (stošca) čije strane zatvaraju s bazom uglove α i β ($\alpha > \beta$). Kolika je zapremina tijela koje zatvaraju omotači (plaštevi) kupa?

648. Zadani su omotač (plašt) M zarubljene kupe (krnjeg stošca), izvodnica s i njezin nagibni ugao prema bazi. Nađi obrazac za zapreminu kupe.

649. Zadani su poluprečnici baza zarubljene kupe (krnjeg stošca) R i r kao i nagibni ugao α izvodnice prema bazi. Nađi poluprečnik one lopte (kugle) koja ima jednaku zapreminu sa kupom.

650. Za
ba
ba
sto
žai

651. Do
ve

650. Zadan je polupreč nik R baze i nagibni ugao α izvodnice prema bazi uspravne kupe. Ravan (ravnina) presijeca kupu paralelno s bazom tako da je omotač (plašt) nastale zarubljene kupe (krnjeg stošca) jednak bazi zadane kupe. Kolika je izvodnica s nastale žarubljene kupe?

651. Donja baza zarubljene kupe je triput, a plašt (omotač) četiri puta veći od gornje baze. Koji ugao zatvara izvodnica sa bazom?

14. Rješavanje kosouglog trougla (kosokutnog trokuta)

Napomena: u zadacima ovog paragrafa uzimamo da su a, b, c stranice trougla, α, β, γ suprotni uglovi, R poluprečnik opisane kružnice, r poluprečnik upisane kružnice, r_a, r_b, r_c poluprečnici vanjskih dodirnih kružnica; h_a, h_b, h_c su visine, a t_a, t_b, t_c težišne linije na stranice označene indeksom; s_α, s_β, s_γ su simetrale uglova, a P je površina trougla.

652. Riješi trougao u kome je:

a) $a=7$, $b=13$, $\beta=60°$ b) $b=8$, $c=13$, $\gamma=120°$

c) $a=51$, $b=40$, $\alpha=143°7'48''$ d) $a=44$, $b=39$, $\alpha=95°27'9''$.

653. Nađi stranicu c ako je:

a) $a=8$, $b=3$, $\gamma=60°$ b) $a=4\sqrt{2}$, $b=7$, $\gamma=45°$.

654. Nađi uglove trougla u kome je:

a) $a=8$, $b=3$, $\gamma=60°$ b) $b=25$, $c=17$, $\alpha=73°44'24''$

c) $a=15$, $c=4$, $\beta=53°7'48''$.

655. Riješi trougao ako je:

a) $a=40$, $b=37$, $\gamma=18°55'30''$ b) $a=44$, $c=15$, $\beta=53°7'48''$

c) $b=33$, $c=25$, $\alpha=126°52'12''$ d) $a=37$, $b=20$, $\gamma=17°56'43''$.

656. U trouglu je $b=3\sqrt{2}$, $c=5$, $\gamma=45°$. Bez upotrebe tablica nađi $\sin\alpha$, $\sin\beta$ i a.

657. Riješi trougao u kome je:

a) $a=8$, $\beta=38°12'48''$, $\gamma=60°$ b) $a=5$, $\alpha=13°10'25''$, $\gamma=120°$

c) $b=25$, $\alpha=81°12'9''$, $\gamma=36°52'12''$

d) $c=26$, $\alpha=112°37'12''$, $\beta=39°18'27''$.

658. Nađi uglove trougla u kome je:

a) $a=8,\ b=3,\ c=7$ b) $a=3,\ b=5,\ c=7$

c) $a=4\sqrt{2},\ b=7,\ c=5$ d) $a=3\sqrt{2},\ b=1,\ c=5.$

659. Nađi uglove trougla u kome je:

a) $a=17,\ b=10,\ c=9$ b) $a=36,\ b=29,\ c=25$

c) $a=52,\ b=51,\ c=25.$

660. a) Stranice trougla se odnose kao $5:7:8$. Koliki je srednji ugao?

b) $a:b:c=3:5:7$. Koliki je najveći ugao?

661. Dokaži: za svaki prirodni broj $k>1$ su stranice trougla prirodni brojevi a ugao γ ima datu vrijednost, i to:

a) $a=2k,\ b=k^2-1,\ c=k^2+1,\ \gamma=90°$

b) $a=2k-1,\ b=k^2-1,\ c=k^2-k+1,\ \gamma=60°$

c) $a=2k+1,\ b=k^2-1,\ c=k^2+k+1,\ \gamma=120°.$

662. Nađi treću stranicu bez upotrebe logaritamskog računa ako je:

a) $a=7,\ b=13,\ \beta=60°$ b) $a=7,\ c=37,\ \gamma=120°$

c) $a=13,\ b=15,\ \alpha=60°$ d) $a=13,\ b=15\sqrt{3},\ \alpha=30°$

e) $a=7\sqrt{3},\ c=13,\ \gamma=150°.$

663. U šta prelazi: a) sinusova teorema, b) kosinusova teorema, ako je jedan od uglova trougla pravi?

664. Nađi treću stranicu raznostraničnog trougla u kome je:

a) $a=35,\ b=25,\ \alpha=2\beta$ b) $a=12,\ b=9,\ \alpha=2\beta.$

665. Riješi trougao ako je:

a) $a=12,\ b=8,\ \alpha=2\beta$ b) $b=12,\ c=9,\ \beta=2\gamma.$

666. Bez upotrebe tablica nađi sinuse sva tri ugla pa zatim stranicu c trougla u kome je:

a) $a=2\sqrt{3},\ b=3,\ \alpha=2\beta$ b) $a=6,\ b=4,\ \alpha=2\beta.$

667. Nađi nepoznatu stranicu bez tablica ako je:

a) $b=9,\ c=7,\ \alpha=2\beta$ b) $b=4,\ c=5,\ \alpha=2\beta$

c) $a=51,\ c=49\ \ \beta=2\gamma$ d) $b=16,\ c=9,\ \alpha=2\gamma.$

668. Ne upotrebljavajući logaritamski račun nađi nepoznatu stranicu trougla u kome je:

a) $a=20,\ c=9,\ \alpha=2\beta$ b) $b=28,\ c=33,\ \beta=2\alpha$

c) $a=10,\ c=3,\ \alpha=3\beta$ d) $a=6,\ c=5,\ \alpha=2\beta$.

669. U trouglu $a:b=8:7,\ \beta=60°$. Nađi $\sin\alpha$ i $\sin\gamma$ bez upotrebe tablica.

670. Nađi uglove trougla u kome je:

a) $a:b=11:8,\ \alpha=2\beta$ b) $b:c=33:16,\ \beta=3\gamma$.

671. Nađi uglove trougla u kome je:

a) $a:b=3:2,\ \gamma=55°46'16''$ b) $a:c=35:8,\ \beta=36°52'12''$

c) $a:b=15:13,\ \alpha-\beta=59°29'24''$

d) $b:c=10:9,\ \beta-\gamma=3°00'54''$.

672. U trouglu je $b:c=4:1,\ a=4\sqrt{5},\ \alpha=2\beta$. Nađi bez upotrebe tablica sinuse sva tri ugla pa zatim nepoznate stranice b i c.

673. Ne upotrebljavajući logaritamski račun nađi nepoznate stranice raznostraničnog trougla u kome je: $a:b=\sqrt{3}:\sqrt{2},\ \alpha:\beta=2:1,\ c=1$.

674. Nađi stranice ne upotrebljavajući logaritamski račun ako je $a:c=12:7,\ b=3$ i $\alpha=2\beta$.

675. Nađi stranice bez upotrebe tablica a uglove pomoću logaritama ako je:

a) $a:b=4:3,\ c=7,\ \alpha:\beta=2:1$ b) $a:b=5:4,\ c=9,\ \alpha:\beta=2:1$

c) $b:c=7:4,\ a=33,\ \beta:\gamma=2:1$.

676. Riješi trougao u kome je: $a:b=39:25,\ c=32,\ \gamma=14°15'$.

677. Nađi stranice bez upotrebe logaritamskog računa ako je:

a) $a-b=5,\ c=7,\ \gamma=60°$ b) $b-a=1,\ c=13,\ \gamma=120°$

c) $b+c=20,\ a=5\sqrt{2},\ \gamma=135°$ d) $a:b=13:1,\ c=16\sqrt{3},\ \alpha=30°$

e) $b^2+c^2=53,\ a=3\sqrt{3},\ \beta=150°$

f) $a^2-b^2=240,\ c=8\sqrt{2},\ \alpha=135°$.

678. Nađi bez tablica nepoznate stranice trougla u kome je:

a) $c-b=4,\ a=3\sqrt{2},\ \gamma=135°$

b) $c-2b=3,\ a=3\sqrt{3},\ \gamma=150°$

c) $2c-3b=5,\ a=5\sqrt{2},\ \gamma=135°$

d) $a^2-c^2=23,\ b=1,\ \gamma=30°$.

679. Nađi stranice bez upotrebe tablica ako je:

a) $a^2+2b^2=82,\ c=7,\ \gamma=60°$ b) $a^2-2b^2=14,\ c=7,\ \gamma=60°$

c) $2a^2+b^2=43,\ c=7,\ \gamma=120°$ d) $b^2-c^2=15,\ a=13,\ \alpha=120°$.

680. U trouglu je $a^2+b^2=34,\ c=7,\ \gamma=120°$. Nađi a, b, $\sin\alpha$, $\sin\beta$ bez upotrebe tablica.

681. Stranice trougla su tri uzastopna cijela broja a najveći ugao je dvaput veći od najmanjeg. Stranice nađi bez upotrebe tablica a uglove pomoću logaritama.

682. Stranice trougla su tri uzastopna neparna broja a najveći ugao iznosi 120°. Nađi stranice bez upotrebe tablica a zatim uglove pomoću logaritama.

683. Riješi trougao ako je:

a) $R=\frac{65}{8},\ b=14,\ \gamma=67°22'48''$

b) $R=\frac{205}{6},\ a=15,\ \beta=130°26'59''$.

684. Nađi uglove trougla u kome je:

a) $R:b=7\sqrt{3}:9,\ \gamma=60°$ b) $R:a=13:10,\ \gamma=30°30'37''$.

685. Nađi nepoznate stranice trougla u kome je:

a) $s-a=1,\ \alpha=112°37'12'',\ \beta=53°7'48'';\quad \left(s=\frac{a+b+c}{2}\right)$

b) $s-b=8,\ \alpha=126°52'12'',\ \gamma=14°15'$

c) $s-c=14,\ \alpha=75°45',\ \beta=67°22'48''$

d) $s-a=3,\ \beta=31°53'27'',\ \gamma=21°14'21''$.

686. Nađi nepoznatu stranicu i uglove trougla:

a) $a=56,\ b=21,\ \alpha-\beta=60°$ b) $a=56,\ b=35,\ \alpha-\beta=60°$

c) $b=35,\ c=21,\ \beta-\gamma=120°$ d) $a=104,\ c=91,\ \alpha-\gamma=120°$.

687. U trouglu je $a=35,\ b=21,\ \alpha-\beta=120°$. Nađi $\cos\gamma$ i c ne upotrebljavajući tablice.

688. Bez upotrebe tablica nađi nepoznate stranice ako je:

a) $a=9,\ b=5,\ \alpha-\beta=2\gamma$ b) $a=16,\ b=15,\ \alpha-\beta=2\gamma$

c) $b=4,\ c=3,\ \beta-\gamma=2\alpha$.

689. Riješi trougao u kome je:

a) $a=49,\ b=33,\ \alpha-\beta=2\gamma$ b) $a=27,\ b=24,\ \alpha-\beta=\frac{1}{2}\gamma$.

690. Riješi trougao u kome je:

a) $a:b=25:24,\ c=10,\ \alpha-\beta=2\gamma$

b) $a:b=16:15,\ c=31,\ \alpha-\beta=\frac{\gamma}{2}$

c) $a:b=9:5,\ c=12,\ \alpha-\beta=2\gamma$

d) $a:b=12:5,\ c=16,\ \alpha-\beta=4\gamma$.

691. Nađi stranice a i b bez upotrebe tablica ako je $a:b=4:3,\ c=7,\ \alpha-\beta=90°$.

692. Riješi trougao u kome je $a:b=12:5,\ c=119,\ \alpha-\beta=90°$. Stranice nađi bez upotrebe tablica a zatim uglove pomoću logaritama.

Riješi trougao u kome je:

693. a) $a+b=28,\ \alpha=112°37'12'',\ \beta=53°7'48''$

b) $a+b=51,\ \alpha=106°15'37'',\ \beta=67°22'48''$

c) $a-b=7,\ \alpha=112°37'12'',\ \beta=36°52'12''$.

d) $a-b=4,\ \alpha=98°47'51'',\ \beta=53°7'48''$.

694. a) $a+b=67,\ c=13,\ \gamma=18°55'29''$

b) $b+c=42,\ a=28,\ \alpha=81°12'9''$.

695. a) $a=51,\ b+c=61,\ \beta=39°18'27''$

b) $b=25,\ a+c=45,\ \alpha=81°12'9''$.

696. a) $a-b=4,\ c=6,\ \gamma=9°31'38''$

b) $b-c=2,\ a=52,\ \alpha=136°23'50''$.

697. a) $s=10,\ \alpha=81°47'12'',\ \gamma=60°$

b) $s=42,\ \alpha=22°37'12'',\ \beta=39°18'27''$.

698. a) $2s=108,\ a=51,\ \alpha=124°12'20''$

b) $2s=110,\ b=33,\ \beta=30°30'37''$.

699. a) $a-c=5,\ \beta=60°,\ P=6\sqrt{3}$

b) $b-a=11,\ \gamma=120°,\ P=20\sqrt{3}$

c) $a-b=7,\ \gamma=60°,\ P=30\sqrt{3}$

d) $b-a=1,\ \gamma=120°,\ P=14\sqrt{3}$.

700. a) $P=84,\ \alpha=98°47'51'',\ \beta=53°7'48''$

b) $P=60,\ \beta=43°36'10'',\ \gamma=9°31'38''$.

701. a) $b=10,\ P=36,\ \beta=28°4'21''$ b) $a=37,\ P=180,\ \alpha=112°37'12''$.

702. a) $b+c=31,\ a=29,\ P=60$ b) $a+b=88,\ c=20,\ P=306$.

703. a) $a:b=6:5,\ \alpha:\beta=2:1,\ P=132$

b) $a:b=5:4,\ \alpha=3\beta,\ P=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$

c) $a:b=8:5,\ \alpha=2\beta,\ P=468$.

704. Nađi stranice trougla bez upotrebe tablica ako je $R=\dfrac{7\sqrt{3}}{3},\ a-b=3,$ $\gamma=60°$.

705. U trouglu je zadano: $R=\dfrac{7\sqrt{3}}{3},\ a-b=5,\ c=7$. Bez upotrebe tablica izračunaj stranice a zatim uglove.

Riješi trougao u kome je:

706. $a:b=6:5,\ \alpha:\beta=2:1,\ R=\dfrac{125}{8}$.

707. a) $2s=90,\ \alpha=93°41'43'',\ R=\dfrac{481}{24}$

b) $2s=110,\ \beta=30°30'37'',\ R=\dfrac{65}{2}$

708. a) $R=\dfrac{205}{6},\ P=126,\ \alpha=12°40'49''$

b) $R=\dfrac{145}{8},\ P=360,\ \beta=53°7'48''.$

709. a) Nađi stranice trougla u kome je: a) $a+b=8,\ h_c=\dfrac{15\sqrt{3}}{14},\ \gamma=120°$

b) $b+c=15,\ h_a=\dfrac{28\sqrt{3}}{13},\ \alpha=120°$

c) $a+c=11,\ h_b=\dfrac{12\sqrt{3}}{7},\ \beta=60°.$

Riješi trougao u kome je:

710. a) $a=25,\ h_a=\dfrac{36}{5},\ \alpha=118°4'21''$ b) $c=4,\ h_c=12,\ \gamma=14°15'.$

711. a) $a=15,\ b+c=17,\ h_a=\dfrac{16}{5},$ b) $b=25,\ a+c=35,\ h_b=\dfrac{24}{5}.$

712. a) $r=\dfrac{7}{3},\ \beta=36°52'12'',\ \gamma=9°31'38''$

b) $r=6,\ \alpha=81°12'9'',\ \beta=61°55'39''.$

713. a) $a:b=6:5,\ r=4,\ \alpha=2\beta$ b) $a:b=8:5,\ r=9,\ \alpha:\beta=2:1$

c) $a:b=39:25,\ r=\dfrac{91}{3},\ \alpha=3\beta.$

714. a) $r=5,\ h_a=20,\ \gamma=136°23'50''$ b) $r=6,\ h_c=28,\ \beta=31°53'27''.$

715. a) $P=360,\ r=8,\ a=36$ b) $P=66,\ r=3,\ b=13.$

716. a) $r=6,\ b-c=8,\ \beta-\gamma=25°3'27''$

b) $r=3,\ a-b=11,\ \alpha-\beta=115°3'27''.$

717. a) $b+c=24,\ r=3,\ a=20$ b) $a+b=88,\ c=24,\ r=6.$

718. a) $r=3,\ b+c=53,\ \alpha=143°7'48''$

b) $r=3,\ a+b=57,\ \gamma=17°56'43''$

719. a) $R=\frac{65}{2},\ r=3,\ \alpha=143°7'48''$ b) $R=\frac{65}{8},\ r=\frac{3}{2},\ \beta=53°7'48''.$

720. U trouglu je zadano c, h_c i ugao $\alpha=60°$. a) Izrazi stranice a i b pomoću c i h_c. b) Izračunaj a i b ako je $c=16,\ h_c=5\sqrt{3}$.

Riješi trougao u kome je:

721. a) $h_c=8,\ r=2,\ \gamma=25°3'27''$

b) $h_b=11{,}4,\ r=3,\ \beta=18°55'29''.$

722. a) $h_a=15,\ r=6,\ R=\frac{85}{6}$ b) $h_b=20,\ r=6,\ R=\frac{65}{2}.$

723. a) $h_a=\frac{208}{17},\ P=624,\ R=85$ b) $h_b=\frac{468}{41},\ P=234,\ R=\frac{205}{6}.$

724. Odredi ugao α trougla u kome je $b=4,\ c=9$ a težišna linija t_a je srednja geometrijska proporcionala između b i c.

725. Nađi nepoznate stranice i napiši relacije iz kojih se mogu naći uglovi trougla u kome je $a=8,\ h_a=3\sqrt{5},\ t_a=7$

726. U trouglu je zadano: $a+b,\ t_c$, i P. Napiši relacije iz kojih se može naći ugao γ i stranice a i b. (Uzmi specijalno $a+b=16,\ t_c=7,\ P=12\sqrt{5}$).

727. Tangensi uglova trougla odnose se kao $55:70:99$. Kako se odnose njegove stranice? Kolike su stranice ako je poluprečnik opisane kružnice 65?

728. Tangensi poluuglova trougla odnose se kao $21\cdot 24:28$. Kako se odnose njegove stranice? Kolike su one ako je površina trougla 336?

729. Stranice trougla su članovi aritmetičkog niza ako njegovi uglovi α i γ zadovoljavaju relaciju $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{3}$. —Dokaži!

Dokaži da za svaki trougao vrijede relacije:

730. $a \sin \alpha = c \sin \gamma + b \sin (\alpha - \gamma)$.

731. $a \sin (\beta - \gamma) + b \sin (\gamma - \alpha) + c \sin (\alpha - \beta) = 0$.

732. $\dfrac{a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma}{a \cos \alpha + b \cos \beta - c \cos \gamma} = \dfrac{R(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}$.

733. $\dfrac{\cos \alpha}{c \sin \beta} + \dfrac{\cos \beta}{a \sin \gamma} + \dfrac{\cos \gamma}{b \sin \alpha} = \dfrac{1}{R}$.

734. $b\left(\operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \dfrac{\beta}{2}\right) + c\left(\operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \dfrac{\gamma}{2}\right) = 4R$.

735. $\dfrac{1}{a}\left(\operatorname{tg} \dfrac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \dfrac{\gamma}{2}\right) + \dfrac{1}{b}\left(\operatorname{tg} \dfrac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2}\right) + \dfrac{1}{c}\left(\operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \dfrac{\beta}{2}\right) = \dfrac{1}{r}$.

736. a) $r = 4R \sin \dfrac{\alpha}{2} \sin \dfrac{\beta}{2} \sin \dfrac{\gamma}{2}$ b) $R = \dfrac{s}{4 \cos \dfrac{\alpha}{2} \cos \dfrac{\beta}{2} \cos \dfrac{\gamma}{2}}$

c) $r = s \operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \dfrac{\beta}{2} \operatorname{tg} \dfrac{\gamma}{2}$ d) $r_a = 4R \sin \dfrac{\alpha}{2} \cos \dfrac{\beta}{2} \cos \dfrac{\gamma}{2}$

e) $r = \dfrac{a \sin \dfrac{\beta}{2} \sin \dfrac{\gamma}{2}}{\cos \dfrac{\alpha}{2}}$ f) $r_a = \dfrac{a \cos \dfrac{\beta}{2} \cos \dfrac{\gamma}{2}}{\cos \dfrac{\alpha}{2}}$

g) $r_a + r_b + r_c - r = 4R$ h) $P = r^2 \operatorname{ctg} \dfrac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \dfrac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \dfrac{\gamma}{2}$

i) $P = r_a^2 \operatorname{ctg} \dfrac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \dfrac{\beta}{2} \operatorname{tg} \dfrac{\gamma}{2}$.

737. Dokaži da je trougao pravougli (pravokutni) ako njegovi elementi zadovoljavaju relacije:

a) $\sin \alpha = \cos \beta + \cos \gamma$ b) $\sin \gamma = \dfrac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$

c) ako su uglovi takvi da su $\operatorname{ctg} \dfrac{\alpha}{2}$, $\operatorname{ctg} \dfrac{\beta}{2}$ i $\operatorname{ctg} \dfrac{\gamma}{2}$ tri uzastopna

prirodna broja, d) ako uglovi trougla čine aritmetički niz a najduža stranica c je jednaka dvostrukoj najkraćoj stranici a,

e) $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{b}{a+c}$.

738. Trougao je jednakokraki (istokračni) ako je:

a) $\sin\alpha=2\sin\beta\cos\gamma$ b) $\sin\frac{\alpha}{2}\cos^3\frac{\beta}{2}=\sin\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

739. Dokaži: ako stranice trougla zadovoljavaju uslov $3b=a+c$, onda je:

a) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=2$ b) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$.

740. Dokaži: ako stranice trougla čine aritmetički niz, onda je:

a) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=3$ b) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=2\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$

c) $2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\sin\frac{\beta}{2}$.

741. Dokaži: ako je stranica AB trougla normalna na težišnu liniju t_a koja je povučena iz vrha A, onda je:

a) $b^2+3c^2=a^2$ b) $\cos\alpha=-\frac{c}{b}$

c) $\cos\beta=\frac{2c}{a}$ d) $\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(a-b)(2b-a)}{6ab}}$.

= = = = = = = = = =

Riješi trougao u kome je zadano:

742. a) $r_a=30$, $a=28$, $\gamma=36°52'12''$

b) $r_c=18$, $c=25$, $\alpha=83°16'2''$.

743. a) $r_a=40$, $\beta=53°7'48''$, $\gamma=43°36'10''$

b) $r_b=15$, $\alpha=126°52'12''$, $\beta=30°30'37''$.

744. a) $r_a=72$, $r_b=9$, $r_c=8$, b) $r_a=28$, $r_b=12$, $r_c=6$.

745. $s_\gamma=\frac{24\sqrt{3}}{11}$, $\alpha=98°12'48''$, $\beta=21°47'12''$.

746. $s_\gamma = \frac{15}{8}$, $a = 3$, $b = 5$. **747.** $s_\gamma = \frac{40\sqrt{3}}{13}$, $h_c = \frac{20\sqrt{3}}{7}$, $\alpha = 60°$.

748. $a = 15$, $b = 8$, $h_b = \frac{15\sqrt{3}}{2}$.

749. $a = 36$, $h_a = 20$, $h_b = \frac{144}{5}$.

750. $h_a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $h_b = 4\sqrt{3}$, $\gamma = 60°$.

751. $a = 6$, $c = 7$, $t_a = 5$. Nađi b!

752. Nađi bez upotrebe tablica stranicu c i površinu trougla ako je $a = 7$, $b = 11$, $t_c = 7$.

753. Objasni kako će se riješiti trougao u kome je zadano: a, t_b, t_c.

754. Nađi stranice trougla u kome je:

a) $a = 5$, $h_a = \frac{12}{5}$, $t_a = \frac{5}{2}$ b) $c = 8$, $h_c = 3\sqrt{5}$, $t_c = 7$.

15. Primjena trigonometrije

755. Izračunaj uglove (kutove) paralelograma čije su stranice 7 i 8 a dijagonala iznosi 13.

756. Romboid se sastoji od dva trougla (trokuta) čije su stranice $a=3$, $b=5$, $c=7$ tako da im je stranica c zajednička. Odredi uglove, drugu dijagonalu i površinu romboida.

757. Obim (opseg) paralelograma iznosi 22, površina je $12\sqrt{3}$ a jedan ugao (kut) je 60°. Izračunaj stranice paralelograma.

758. a) Zadane su stranice paralelograma i to $a=8$, $b=5$ a zahvaćeni ugao iznosi 60°. Izračunaj dijagonale d i e, ugao φ između dijagonala i površinu P paralelograma.

b) $a=7$, $b=8$, $\alpha=120°$; d, e, φ, $P=?$

c) $a=10$, $b=16$, $\varphi=119°22'31''$; $\alpha=?$

d) zadano: d, e, P; izračunaj: a, b, α, φ i

e) $d=7$, $e=\sqrt{129}$, $P=20\sqrt{3}$; a, b, α, $\varphi=?$

759. Suma kvadrata dijagonala paralelograma jednaka je sumi kvadrata njegovih stranica. — Dokaži!

760. Koliki su kraci trapeza čije su osnovice $a=49$, $c=10$ a uglovi $\alpha=22°37'12''$ i $\beta=14°15'$?

761. Izračunaj uglove (kutove) trapeza kome su osnovice $a=13$, $c=5$ a kraci $b=7$ i $d=3$.

762. Napiši izraz za površinu trapeza čije su osnovice a i c a uglovi na osnovici α i β.

763. Zadane su osnovice a i c jednakokrakog (istokračnog) trapeza kao i krak b. Nađi obrazac za izračunavanje poluprečnika (polumjera) kružnice opisane oko trapeza.

764. U svakom trapezu je suma kvadrata dijagonala jednaka sumi kvadrata krakova i dvostrukog proizvoda (umnoška) osnovica. — Dokaži!

765. Trougao u kome je $a=3$, $b=5$, $\gamma=120°$ preslikamo simetrično s obzirom na najdužu stranicu. Kolike su dijagonale i poluprečnik (polumjer) upisane kružnice nastalog deltoida?

766. Kružna linija je podijeljena u omjeru $1:2:3:4$ a djelišne tačke uzete su redom za vrhove tetivnog četvorougla. Kolika je njegova površina ako je poluprečnik (polumjer) kružnice r?

767. Stranice tetivnog četvorougla su a, b, c, i d. Nađi obrasce za izračunavanje njegovih uglova (kutova) i površine.

768. Ako je tetivni četvorougao istovremeno i tangentni, njegova je površina $P=\sqrt{abcd}$ gdje su a, b, c, d, njegove stranice. — Dokaži!

769. Baza kose prizme je trougao (trokut) čiji su uglovi (kutovi) α i β a poluprečnik (polumjer) upisane kružnice r. Bočna ivica (brid) b nagnuta je prema bazi za ugao (kut) φ. Kolika je zapremina (volumen) prizme?

770. Zapremina (volumen) prizme je V. Baza je trougao (trokut) čije su stranice a i b a zahvaćeni ugao (kut) γ. Izračunaj zapreminu upisanog cilindra (valjka). Uzmi specijalno $V=300$, $a=16$, $b=39$, $\gamma=120°$.

771. Osnovne ivice (bridovi) trostrane prizme su $a=7$, $b=8$ a ugao (kut) među njima iznosi 120°. Izračunaj zapreminu (volumen) prizme ako je njezina bočna ivica $c=12$ nagnuta prema bazi za 80°.

772. Baza prizme je trougao koji je upisan u kružnicu poluprečnika (polumjera) R a uglovi su mu α i β. Izračunaj zapreminu (volumen) prizme ako je bočna ivica (brid) a nagnuta prema bazi za ugao φ.

773. U valjak kome je poluprečnik (polumjer) baze $R=7\sqrt{3}$ i visina $h=20$ upisana je trostrana prizma čija je baza trougao kod koga se zna da je $a=9$ i $\beta=120°$. Nađi zapreminu (volumen) prizme.

774. Stranice deltoida su $a=7$, $b=8$ a ugao (kut) među njima iznosi 120°. Kolika je zapremina (volumen) tijela koje nastaje rotacijom deltoida oko svoje simetrale?

775. Trougao (trokut) kome je zadana stranica a i nalegli uglovi β i γ rotira oko stranice a. Napiši obrasce za površinu i zapreminu nastalog tijela.

776. Zadane su stranice trougla $a=9$, $b=15$ a za ugao γ koji one zatvaraju se zna da je $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\sqrt{11}}{4}$. Nađi zapreminu tijela koje nastaje rotacijom trougla oko najduže stranice.

777. Zadane su stranice trapeza a i b kao i uglovi (kutovi) α i β trapeza (uglovi leže na stranici a, a β između a i b). Nađi obrasce za površinu i zapreminu (volumen) tijela koje nastaje rotacijom trapeza oko stranice a.

778. Deltoid čije su stranice $a=5$, $b=16$ a zahvaćeni ugao $\gamma=120°$ rotira oko ose koja prolazi njegovim vrhom paralelno s većom dijagonalom. Kolika je površina i zapremina nastalog tijela?

779. Stranice karakterističnog presjeka kose kupe (stošca) odnose se $S:s=4:3$, a njihovi nagibni uglovi (kutovi) prema bazi $\beta:\alpha=1:2$. Polupreč nik (polumjer) baze kupe $r=7$. Izračunaj zapreminu (volumen) kupe.

780. Ugao pri vrhu karakterističnog presjeka kose kupe (stošca) iznosi 60°, najduža izvodnica $S=30$, a najkraća $s=14$. Kolika je zapremina kupe?

781. Izračunaj zapreminu (volumen) kose kupe ako je površina karakterističnog presjeka $P=36$ a uglovi na bazi $\alpha=25°3'27''$ i $\beta=28°4'21''$.

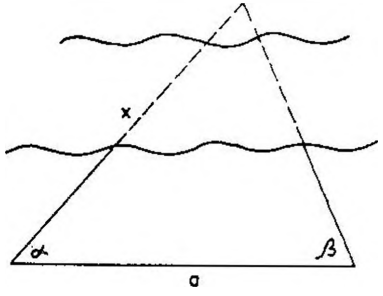
782. Izračunaj zapreminu kose kupe kojoj je polupreč nik $r=10$ a uglovi na osnovici karakterističnog presjeka $\alpha=30°30'37''$ i $\beta=36°52'12''$.

783. Karakteristični presjek kose kupe je trougao čije su stranice $a=7$, $b=8$ i $c=13$ a stranica b je preč nik (promjer) baze. Izračunaj zapreminu kupe.

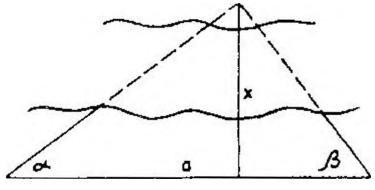
784. Osa kose kupe je m a uglovi koje ona zatvara sa najkraćom i najdužom izvodnicom su α i β. Kolika je zapremina (volumen) kupe?

785. Na obali rijeke se izmjeri duž $\overline{AB}=d=50$ m i uglovi $CAB=\alpha=53°7'48''$ i $CBA=\beta=83°16'2''$ premo tački C na suprotnoj obali. Kolika je širina rijeke?

786. a) Izračunaj rastojanje x između dviju nepristupačnih tačaka ako su direktnim mjerenjem nađene veličine a, α i β (sl. 5).
b) Nađi x ako su poznate veličine a, α, β (sl. 6).



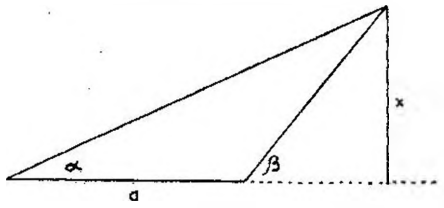
Sl. 5



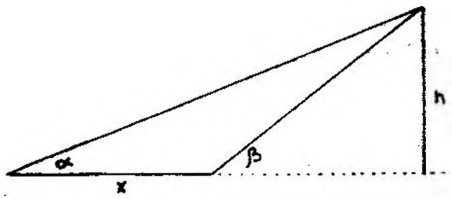
Sl. 6

787. a) Izračunaj x ako su poznate veličine a, α, β (sl. 7).

b) Izračunaj x ako su poznate veličine h, α, β (sl. 8).

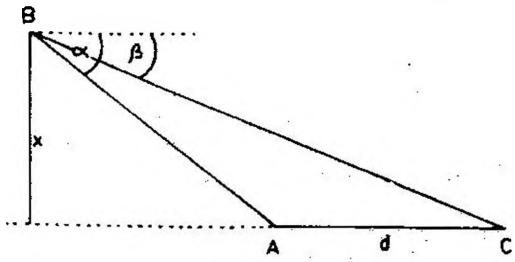


Sl. 7



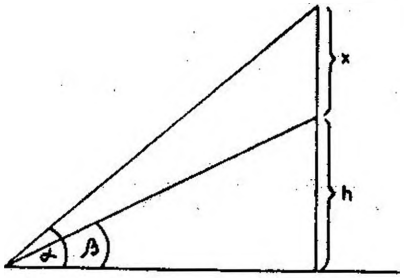
Sl. 8

788. Iz balona B vide se dva mjesta A i C pod uglovima depresije α i β ($\alpha > \beta$). Na kojoj se visini nalazi balon ako je $\overline{AC} = d$ (sl. 9)?

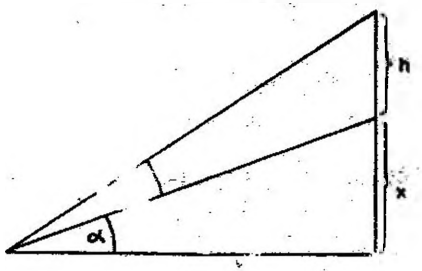


Sl. 9

789. Iz zadanih veličina h, α, β izračunaj x (sl. 10).



Sl. 10



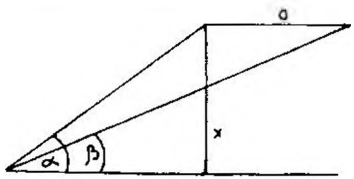
Sl. 11

790. Vrh brda vidi se pod uglom elevacije α, a toranj televizijskog predajnika poznate visine h, koji je na vrhu brijega, vidi se pod vidnim uglom β (sl. 11). Kolika je: a) visina x brijega i b) horizontalna udaljenost y vrha brijega?

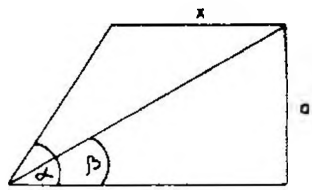
791. Na kući se nalazi antena visine h. Iz tačke koja leži u horizontalnoj ravni (ravnini) podnožja kuće mjere se elevacioni uglovi α prema podnožju i β prema vrhu antene. Kolika je visina x kuće (nacrtaj sliku)?

792. a) Izračunaj x ako su poznate veličine a, α, β (sl. 12).

b) Isti zadatak prema slici 13.

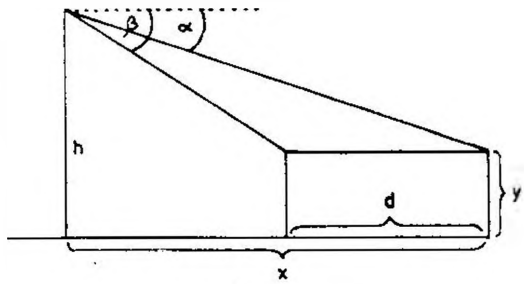


Sl. 12



Sl. 13

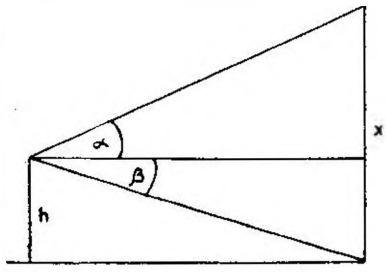
793. Na obali mora nalazi se toranj visine h. Sa njegovog vrha vidi se vrh jarbola broda pod uglom depresije α. Pošto se brod približi tornju za d, vrh jarbola se vidi pod uglom depresije β. a) Kolika je horizontalna razdaljina x broda u prvom mjerenju? b) Kolika je visina y jarbola? (sl. 14).



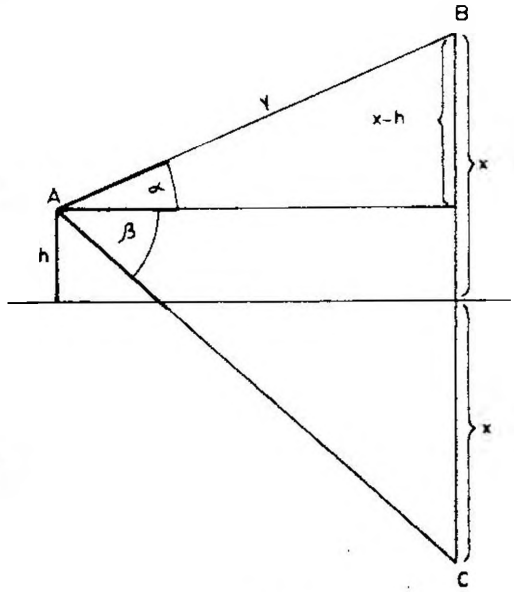
Sl. 14

794. Iz poznatih veličina h, α, β izračunaj x (sl. 15).

795. Iz tačke A koja se nalazi h metara iznad mora posmatra se ptica u tački B pod elevacionim uglom α, a njezina slika C u moru pod uglom depresije β. Na kojoj visini iznad mora leti ptica? (sl. 16).

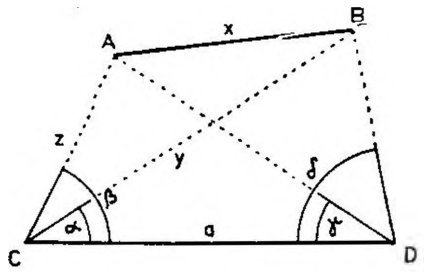


Sl. 15

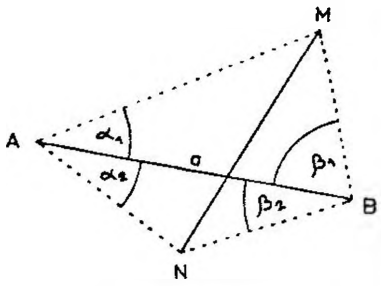


Sl. 16

796. Izračunaj rastojanje između dviju nepristupačnih tačaka A i B ako su iz tačaka C i D izmjerene veličine a, α, β, γ, δ (sl. 17).



Sl. 17

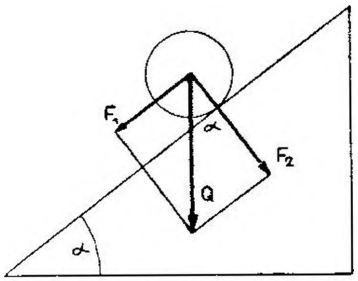


Sl. 18

797. Da bi se odredila rastojanja između nepristupačnih tačaka M i N na terenu, odabere se duž $\overline{AB}=a$ koja presijeca MN, a tačke A i B su odabrane tako da se iz svake od njih vide preostale tri tačke. Izmjere se uglovi $BAM=\alpha_1$, $BAN=\alpha_2$, $ABM=\beta_1$, $ABN=\beta_2$. Izračunaj iz poznate veličine a i tih uglova rastojanje $\overline{MN}$ (sl. 18).

798. Na strmoj ravni (kosini) sa nagibnim uglom (kutom) $\alpha = 38°$ postavljen je teret $Q = 120$ kN. Odredi komponente F_1 i F_2 (sl. 19).

799. Na strmoj ravni (kosini) leži tijelo težine $Q = 420$ kN. Kolika je potrebna sila paralelna sa kosinom da spriječi kotrljanje ako je $\alpha = 26°32'$?



Sl. 19

800. Koji ugao (kut) α zatvaraju međusobno dvije sile F_1 i F_2 ako njihova rezultanta R dijeli taj ugao tako da je $\alpha_1 : \alpha_2 = 2:1$, a $F_1 : F_2 = 15:16$ (sl. 85)?

801. Dvije sile $F_1 = 55$ kN i $F_2 = 26$ kN djeluju u tački pod uglom (kutom) $\alpha = 112°37'12''$. Kolika je rezultanta i kolike uglove zatvara sa datim komponentama?

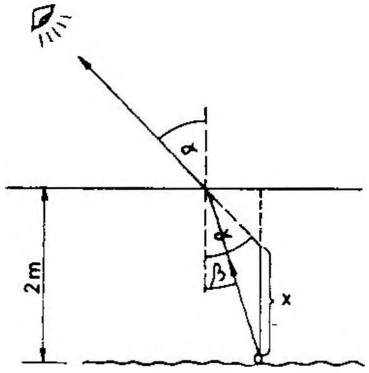
802. Silu $F = 63$ kN treba zamijeniti sa druge dvije koje sa silom čine uglove (kutove) $\alpha = 32°45'$, i $\beta = 53°41'16''$. Kolike su te dvije sile?

803. Tri sile $P = 2488$ kN, $Q = 927$ kN i $R = 1815$ kN čiji vektori leže u jednoj ravni (ravnini) nalaze se u ravnoteži. Nađi uglove (kutove) između sila.

804. Dvije sile čiji se intenziteti odnose kao 5:7, a pravci djelovanja zatvaraju ugao (kut) od 95°, treba da budu u ravnoteži sa silom od 32 kN. Kolike su obje sile?

805. Dvije su tačke razmaknute za $c = 28$ m, a od ravnog ogledala imaju odstojanja $a = 5$ m i $b = 9$ m. Koliki je upadni ugao (kut) svjetlosnog zraka koji prolazi jednom tačkom a reflektira se drugom?

806. Kamen leži u vodi u dubini od 2 m. Njegova slika vidi se s obzirom na normalu pod uglom (kutom) $\alpha = 72°$ (vidi sl. 20). Za koliko (x) se pričinja da je pomaknuta njegova slika u odnosu na stvarni položaj ako je indeks loma vode $\frac{4}{3}$?



Sl. 20

807. Koliki paralelni pomak (x) dobije svjetlosni zrak pri prolazu kroz 4 cm debelu staklenu planparalelnu ploču ako je upadni ugao (kut) $\alpha = 42°20'$ a indeks loma stakla je $\frac{3}{2}$?

808. Pravougli (pravokutni) paralelepiped sa ivicama (bridovima) $a = 10$ cm, $b = 20$ cm i $c = 30$ cm okrene se oko ivice b. Za koliki ugao (kut) α je moguće zaokrenuti to tijelo a da se ne izvrne?

16. Mješoviti zadaci za ponavljanje trigonometrije

809. Za koji ugao (kut) α $(0^\circ < \alpha < 360^\circ)$ je maksimalan proizvod (umnožak) $4 \sin\alpha \cos\alpha (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$?

810. Koliki je ugao α $(0^\circ < \alpha < 360^\circ)$ u beskonačnom redu $1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \cdots$ da bi razlika između sume svih neparnih članova i sume svih parnih članova iznosila $\frac{2}{3}$?

811. Ako za uglove β i γ trougla vrijedi relacija $\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}$, trougao je pravougli ili jednakokraki (istokračni). – Dokaži!

812. Pokaži da je $\frac{1 - 2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$.

813. Pokaži da je $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}$.

814. Dovedi izraz $a\sin\alpha + b\cos\alpha$ na oblik za logaritmovanje.

815. Dokaži: a) $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$ b) $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}$

c) $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$.

Dokaži da je:

816. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta) = \sin^2(\alpha+\beta)$.

817. $\cos^2 x + \cos^2(\alpha + x) - 2\cos\alpha\cos x\cos(\alpha + x) = \sin^2\alpha$.

818. $\sin^2(45^\circ + \alpha) - \sin^2(30^\circ - \alpha) - \sin 15^\circ\cos(15^\circ + 2\alpha) = \sin 2\alpha$.

819. $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$.

820. $\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$.

821. $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$.

822. $\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$.

823. $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$.

824. $\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=1$.

825. $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)=\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$.

826. $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)$.

827. $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha+\frac{1}{\cos 2\alpha}$.

828. $2\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}+\operatorname{ctg}2\alpha\right)=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

829. $\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

830. $\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{2}{\cos 2\alpha}$.

831. Odredi limes funkcije $f(x)=\frac{1-\sin x+\cos x}{-1+\sin x+\cos x}$ kad $x\to\frac{\pi}{2}$.

Dokaži da je:

832. a) $\frac{\sin x+\cos(2y-x)}{\cos x-\sin(2y-x)}=\frac{1+\sin 2y}{\cos 2y}$

b) $\dfrac{\sin\alpha+\cos(2\beta-\alpha)}{\cos\alpha-\sin(2\beta-\alpha)}=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\beta\right)$.

833. $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha-\gamma)+\sin(\beta-\gamma)=$
$=4\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}$.

834. $2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)+1=0$.

835. a) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$.

b) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)(1-\sin\alpha)}{\cos\alpha}=1$.

836. $\dfrac{2(\sin 2\alpha+2\cos^2\alpha-1)}{\cos\alpha-\sin\alpha-\cos 3\alpha+\sin 3\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha}$.

837. $\dfrac{\sin\alpha-\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\operatorname{tg} 3\alpha$.

838. Ako je $|A|<1$ i $\sin\alpha=A\sin(\alpha+\beta)$ i $\cos\alpha\neq 0$, onda je $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=$
$=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta-A}$. — Dokaži!

839. Dokaži da je $\sin(\alpha+2\beta)=\sin\alpha$ ako je $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=0$.

840. Nađi minimum funkcije $y=\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x}+\dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2 x}$.

841. Nađi maksimum i minimum funkcije $f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x$.

842. Nađi limes funkcije $f(x)=\dfrac{\sin x\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$ kad $x\to\dfrac{\pi}{3}$.

843. Pokaži da se kao rezultat eliminacije x i y iz jednačina $\sin x+\sin y=2a$, $\cos x+\cos y=2b$, $\cos(x-y)=-4ab$ dobiva $(a+b)^2=\dfrac{1}{2}$.

844. Dokaži da izraz $y=\sin^8 x+\cos^8 x-2(1-\sin^2 x\cos^2 x)^2$ ne zavisi od x.

845. Nađi $\operatorname{tg} 2x$ ako je $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0$.

846. Riješi jednačinu $\sin 3x+\sin 2x=a\sin x$ i ispitaj između kojih vrijednosti može varirati a da bi jednačina imala rješenja.

847. Nađi $\cos 2\alpha$ ako se zna da je $\operatorname{tg}^2\alpha-a\operatorname{tg}\alpha+1=0$ $(a>0)$ a ugao α leži: a) između 0 i $\frac{\pi}{4}$, b) između $\frac{\pi}{4}$ i $\frac{\pi}{2}$ i c) $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

848. Za koje vrijednosti α su realna rješenja jednačine $x^2+8x\sin\alpha+4=0$?

849. a) U jednačini $x^2-2x\sin\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha-\frac{3}{4}=0$ odredi α $(0<\alpha<360°)$ tako da korijeni jednačine budu jednaki.
b) Isto pitanje za jednačinu $16x^2-16x\cos\alpha+4\cos\alpha-1=0$.

850. Nađi $\operatorname{tg} x$ ako je $2\cos x\cos(\alpha-x)=\cos\alpha$.

851. Nađi $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ ako je $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{2}$ a ugao α je iz intervala $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$.

852. Pokaži: ako x zadovoljava jednačinu $\frac{\cos x-\cos\alpha}{\cos x-\cos\beta}=\frac{\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin^2\beta\cos\alpha}$, $\cos x\neq\cos\beta$ i $x\neq(2n+1)\pi$, onda je $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\pm\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$!

853. Za koje vrijednosti α i β postoji jednakost $\sin\alpha+\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)$?

854. Za koje cijele vrijednosti od n ima funkcija $y=\cos nx\sin\frac{5}{n}x$ period od 3π?

855. Dokaži da izraz $y=\frac{\sin x+\operatorname{tg} x}{\cos x+\operatorname{ctg} x}$ prima pozitivne vrijednosti za sve vrijednosti od x za koje ima smisla.

856. Dokaži: $\sin^3 x \cos^5 x = \frac{1}{64}\sin 2x + \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{64}\sin 6x - \frac{1}{128}\sin 8x$.

857. Za cijeli broj k i $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ je $\sin 2k\alpha + \sin 2k\beta + \sin 2k\gamma = (-1)^{k+1} 4 \sin k\alpha \sin k\beta \sin k\gamma$. Dokaži!

858. Dokaži da je $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 2\operatorname{tg}\alpha$ ako je $3\sin\beta = \sin(2\alpha+\beta)$.

859. Dokaži: $\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c) = 4\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{c+a}{2}\sin\frac{a+b}{2}$.

860. Kako bi na osnovu prethodnog zadatka dokazao neposredno da je $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ ako je $\alpha+\beta+\gamma = 180°$.

861. Nađi vezu među uglovima α, β, γ ako je $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$. Nađi zatim najmanju pozitivnu vrijednost uglova ako je α jednak polovini sume uglova β i γ, a ugao γ jednak sumi preostalih uglova.

862. Ako je $\cos z = \cos x \cos y$, onda je $\operatorname{tg}\frac{z+x}{2}\operatorname{tg}\frac{z-x}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{y}{2}$. – Dokaži!

863. Dovedi na oblik za logaritmovanje $\operatorname{ctg}^2 2x - \operatorname{tg}^2 2x - 8\cos 4x \operatorname{ctg} 4x$.

Dokaži da je:

864. a) $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \sin(\alpha+3\beta) = 4\cos\beta\sin\left(\alpha+\frac{3}{2}\beta\right)\cos\frac{\beta}{2}$

b) $-\sin\alpha - \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \sin(\alpha+3\beta) = 4\sin\beta\cos\left(\alpha+\frac{3}{2}\beta\right)\cos\frac{\beta}{2}$

c) $-\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha+2\beta) + \sin(\alpha+3\beta) = 4\cos\beta\cos\left(\alpha+\frac{3}{2}\beta\right)\sin\frac{\beta}{2}$

d) $\sin\alpha - \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha+2\beta) + \sin(\alpha+3\beta) = -4\sin\beta\sin\left(\alpha+\frac{3}{2}\beta\right)\sin\frac{\beta}{2}$.

865. a) $\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cos(\alpha+3\beta)=$

$$=4\cos\beta\cos\left(\alpha+\frac{3}{2}\beta\right)\cos\frac{\beta}{2}$$

b) $\cos(\alpha+3\beta)+\cos(\alpha+2\beta)-\cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha=$

$$=-4\sin\beta\sin\left(\alpha+\frac{3}{2}\beta\right)\cos\frac{\beta}{2}$$

c) $\cos(\alpha+3\beta)-\cos(\alpha+2\beta)+\cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha=$

$$=-4\cos\beta\sin\left(\alpha+\frac{3}{2}\beta\right)\sin\frac{\beta}{2}$$

d) $\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha+2\beta)+\cos(\alpha+3\beta)=$

$$=-4\sin\beta\cos\left(\alpha+\frac{3}{2}\beta\right)\sin\frac{\beta}{2}.$$

866. a) $\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\cdots+\sin(\alpha+6\beta)+\sin(\alpha+7\beta)=$

$$=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{7}{2}\beta\right)\sin 4\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

b) $\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\cdots+\sin(\alpha+20\beta)=$

$$=\frac{\sin(\alpha+10\beta)\sin\frac{21}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

c) $S_n=\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\cdots+\sin(\alpha+n\beta)=$

$$=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{n}{2}\beta\right)\sin\frac{n+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

d) Dokaži metodom potpune indukcije da obrazac koji smo dokazali u zadatku c) vrijedi za svaki prirodni broj n.

867. a) $\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cdots+\cos(\alpha+6\beta)+\cos(\alpha+7\beta)=$

$$=\frac{\cos\left(\alpha+\frac{7}{2}\beta\right)\sin 4\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

b) $\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cdots+\cos(\alpha+20\beta)=$
$$=\frac{\cos(\alpha+10\beta)\sin\frac{21}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

c) $S_n=\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cdots+\cos(\alpha+n\beta)=$
$$=\frac{\cos\left(\alpha+\frac{n}{2}\beta\right)\sin\frac{n+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

d) Dokaži metodom potpune indukcije da obrazac koji smo dokazali u zadatku c) važi za svaki prirodni broj n.

Dokaži da je:

868. a) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\sin 4\alpha+\sin 5\alpha=\dfrac{\sin\frac{5}{2}\alpha\sin 3\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

b) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\cdots+\sin 6\alpha=\dfrac{\sin 3\alpha\sin\frac{7}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

c) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\cdots+\sin n\alpha=\dfrac{\sin\frac{n}{2}\alpha\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

d) Dokaži metodom potpune indukcije da formula dokazana u zadatku c) vrijedi za svaki prirodni broj n.

869. a) $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cdots+\cos 5\alpha=\dfrac{\sin\frac{5}{2}\alpha\cos 3\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

b) $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cdots+\cos 6\alpha=\dfrac{\sin 3\alpha\cos\frac{7}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

c) $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cdots+\cos n\alpha=\dfrac{\sin\frac{n}{2}\alpha\cos\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

d) Dokaži metodom potpune indukcije da obrazac c) vrijedi za svaki prirodni broj n.

870. a) $1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cdots+\cos 6\alpha=\dfrac{\sin\frac{7}{2}\alpha\cos 3\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

b) $1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cdots+\cos n\alpha=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\cos\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

871. a) $\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha+\sin 9\alpha=\dfrac{\sin^2 5\alpha}{\sin\alpha}$

b) $\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\cdots+\sin(2n-1)\alpha=\dfrac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha}$.

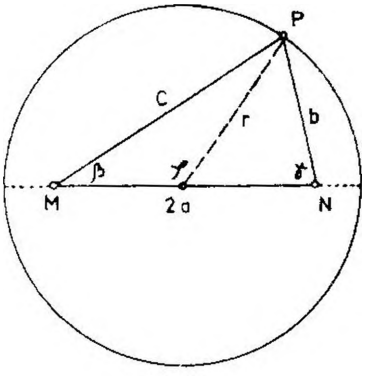
872. a) $\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha+\cos 9\alpha=\dfrac{\sin 10\alpha}{2\sin\alpha}$

b) $\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cdots+\cos(2n-1)\alpha=\dfrac{\sin 2n\alpha}{2\sin\alpha}$.

= = = = = = = = = = =

873. Tangensi poluuglova trougla odnose se kao 6 : 10 : 15 a poluprečnik opisane kružnice iznosi $7\sqrt{3}$. Pod kojim se uglom vidi srednja stranica iz središta opisane kružnice?

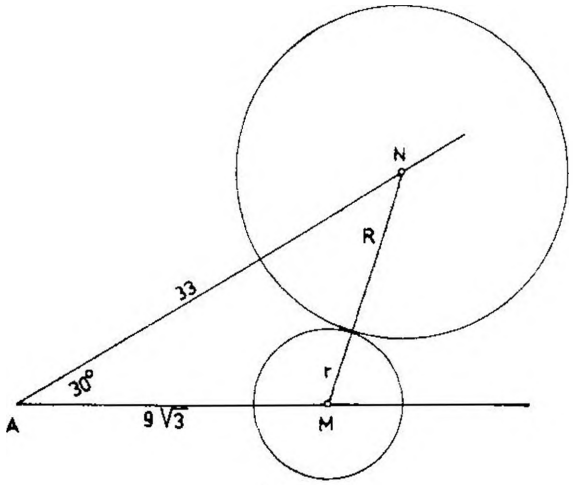
874. U trouglu je $a=\sqrt{3}+1$, $b=\sqrt{3}-1$, a razlika suprotnih uglova iznosi $\dfrac{\pi}{3}$. Dokaži da je trougao pravougli i odredi uglove i stranicu c.



Sl. 21

875. Neka su M i N dvije tačke na prečniku kružnice (sl. 21) podjednako udaljene od središta; P je bilo koja tačka na kružnici. Dokaži da je $\overline{MP}^2+\overline{NP}^2$ konstanta.

876. Na kracima ugla od 30° leže središta M i N dviju kružnica (sl. 22) koje se dodiruju izvana; $\overline{MA} = 9\sqrt{3}$, $\overline{NA} = 33$ gdje je A vrh ugla. Izračunaj polupreč nike r i R kružnica ako je $r : R = 1 : 2$.



Sl. 22

877. Na horizontalnom zemljištu nalazi se uspravan toranj. Njegov vrh se vidi iz udaljenosti od 200 m pod uglom elevacije α. Za koliko metara treba da se primaknemo tornju da bi se ugao elevacije udvostručio?

878. Na horizontalnom zemljištu nalazi se uspravan stub. Ako se on posmatra iz udaljenosti od 25 i 8 metara, uglovi elevacije se odnose kao 1 : 2. Kolika je visina stuba?

879. Osnovne ivice (bridovi) kose prizme iznose $a = 17$, $b = 10$, $c = 9$, a bočna ivica $d = 20$ nagnuta je prema bazi za ugao $\alpha = 30°$. Kolika je zapremina upisanog cilindra?

880. Ivice (bridovi) paralelepipeda su a, b, c. Ugao između ivica a i b je α dok ivica c ima nagibni ugao β prema ravni koju obrazuju a i b. Kolika je zapremina paralelepipeda?

881. Pod kojim nagibnim uglom prema bazi kocke treba da se položi ravan (ravnina) osnovnom ivicom kocke da zapremina dijela kocke iznad presječne ravni bude n puta veća od donjeg dijela?

882. Nad krugom poluprečnika 3 dižu se na suprotne strane dvije uspravne kupe (stošca) čije se visine odnose kao 1 : 3 a nagibni uglovi izvodnica kao 1 : 2. Izračunaj površinu i zapreminu toga tijela.

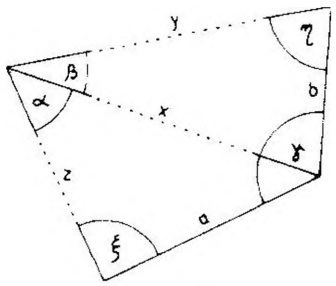
883. Trougao čije su stranice $a=3$, $c=7$ i ugao $\gamma=60°$ rotira oko simetrale onog vanjskog ugla koji je po veličini srednji među vanjskim uglovima. Izračunaj zapreminu i površinu nastalog tijela.

884. U trouglu je zadana stranica a i suprotni ugao α. Kako treba odabrati preostala dva ugla da zapremina tijela koje nastaje rotacijom oko stranice a bude što veća?

885. Dokaži da je $\operatorname{tg} 20° \operatorname{tg} 40° \operatorname{tg} 80° = \sqrt{3}$.

886. Na tijelo djeluju tri sile P_1, P_2 i P_3 čije se jačine odnose kao $8:11:13$. Kolike uglove zatvaraju međusobno sile u slučaju ravnoteže? (Uglove potraži sa tačnošću u minutu).

887. Zadane su veličine (sl. 23) a, b, α, β i γ. Izračunaj uglove ζ i η i rastojanja x, y i z.



Sl. 23

UPUTE I REZULTATI

1. Trigonometrijske funkcije oštrog ugla. Njihove veze. Prirodne vrijednosti

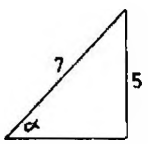
1. Odredi nepoznatu stranicu na osnovu Pitagorine teoreme. Rezultati:

a) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$ **b)** $\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

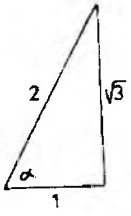
$\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{3}{4}$ **c)** $\sin\alpha=\frac{8}{17}$, $\cos\alpha=\frac{15}{17}$,

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{15}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{15}{8}$ **d)** $\sin\alpha=\frac{12}{37}$, $\cos\alpha=\frac{35}{37}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{12}{35}$.

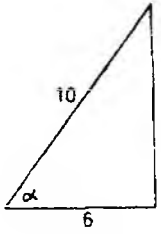
2. **a)** (sl. 24) **b)** (sl. 25) **c)** (sl. 26) **d)** (sl. 27)
e) (sl. 28) **h)** (sl. 29); vidi sliku 27.



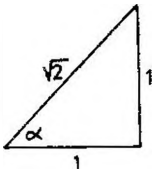
Sl. 24



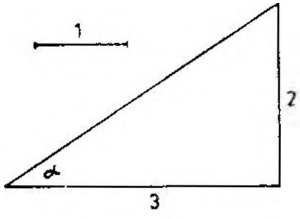
Sl. 25



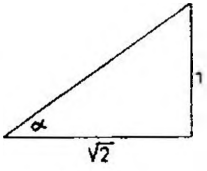
Sl. 26



Sl. 27



Sl. 28



Sl. 29

3. a) $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}=\frac{4}{3}$.

U ostalim zadacima redom rezultati za funkcije $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$ iznose:

b) $\frac{12}{13}, \frac{5}{12}, \frac{12}{5}$ **c)** $\frac{15}{17}, \frac{8}{15}, \frac{15}{8}$ **d)** $\frac{24}{25}, \frac{7}{24}, \frac{24}{7}$

e) $0{,}6, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}$ **f)** $\frac{9-a^2}{9+a^2}, \frac{6a}{9-a^2}, \frac{9-a^2}{6a}$

g) $\frac{a^2-1}{a^2+1}, \frac{2a}{a^2-1}, \frac{a^2-1}{2a}$ **h)** $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}, \frac{2ab}{a^2-b^2}, \frac{a^2-b^2}{2ab}$.

4. a) $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}=\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}=\frac{4}{3}$.

U ostalim zadacima redom rezultati za funkcije $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$ iznose:

b) $\frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{12}{5}$ **c)** $\frac{21}{29}, \frac{21}{20}, \frac{20}{21}$ **d)** $\frac{40}{41}, \frac{40}{9}, \frac{9}{40}$

e) $0{,}96, \frac{24}{7}, \frac{7}{24}$ **f)** $\frac{a^2-25}{a^2+25}, \frac{a^2-25}{10a}, \frac{10a}{a^2-25}$

g) $\frac{9-a^2}{9+a^2}, \frac{9-a^2}{6a}, \frac{6a}{9-a^2}$ **h)** $\frac{2ab}{a^2+b^2}, \frac{2ab}{a^2-b^2}, \frac{a^2-b^2}{2ab}$.

5. a) $\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{4}{5}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{3}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{3}{4}$. U ostalim zadacima rezultati za funkcije $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$ su redom:

b) $\frac{5}{13}, \frac{12}{13}, \frac{12}{5}$ **c)** $\frac{7}{25}, \frac{24}{25}, \frac{25}{24}$ **d)** $\frac{9}{41}, \frac{40}{41}, \frac{40}{9}$

e) $0{,}6,\ 0{,}8, \frac{4}{3}$ **f)** $\frac{6a}{9+a^2}, \frac{9-a^2}{9+a^2}, \frac{9-a^2}{6a}$

g) $\frac{a^2-1}{a^2+1}, \frac{2a}{a^2+1}, \frac{2a}{a^2-1}$ **h)** $\frac{2ab}{a^2+b^2}, \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2-b^2}{2ab}$.

6. a) $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{3}{4}$.

U ostalim zadacima su rezultati za funkcije $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$ redom:

b) $\frac{5}{13}, \frac{12}{13}, \frac{5}{12}$ **c)** $\frac{20}{29}, \frac{21}{29}, \frac{20}{21}$ **d)** $\frac{15}{17}, \frac{8}{17}, \frac{15}{8}$

e) $\frac{5}{13}, \frac{12}{13}, \frac{5}{12}$ f) $\frac{6a}{a^2+9}, \frac{a^2-9}{a^2+9}, \frac{6a}{a^2-9}$

g) $\frac{25-a^2}{25+a^2}, \frac{10a}{25+a^2}, \frac{25-a^2}{10a}$ h) $\frac{4a}{a^2+4}, \frac{a^2-4}{a^2+4}, \frac{4a}{a^2-4}$.

7. Imamo: a) $\frac{1}{2} \div \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} = \frac{3-5\sqrt{3}}{6}$ b) $\sqrt{2}-2$

c) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{13\sqrt{3}}{6}$.

8. a) $3\frac{3}{4}$ b) $5\frac{1}{4}$ c) 3 d) $1-\sqrt{2}$.

9. a) $\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2}$ b) $1+\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ d) $1+\frac{\sqrt{2}}{4}$.

10. a) 0 b) $3+2\sqrt{2}$ c) $2-\sqrt{3}$ d) $\frac{1}{2}$.

11. a) 3 b) $\frac{2}{3}$ c) 0 d) 8.

12. Imamo $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} \cdot \frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

13. a) Zamijeni $\operatorname{tg}\alpha$ sa $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ a $\operatorname{ctg}\alpha$ sa $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ i dovedi na zajednički imenilac.

b) Ponovi postupak kao u prethodnom zadatku pa iza toga proširi razlomak sa $\cos\alpha$; dobićeš $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\alpha}$.

14. a) Imamo: $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}(1-\cos^2\alpha) = \operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

b) Zamijeni $\operatorname{ctg}^2\alpha$ sa $\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$ i $\cos^2\alpha$ sa $1-\sin^2\alpha$ itd.

c) $\cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha(1-\sin^2\alpha)+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} =$

$= \dfrac{1-\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha.$

d) Lijevu stranu identičnosti dovedi na oblik $\dfrac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} =$

$= \dfrac{(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$ itd.

15. a) Zamijeni $\operatorname{tg}\alpha$ sa $\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$. **b)** Uzmi $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\operatorname{ctg}\beta = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta}$.

16. Imamo: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$ itd.

17. a) Dovedi lijevu stranu na zajednički imenilac i zamijeni $1-\cos^2\alpha$ sa $\sin^2\alpha$. **b)** Dovedi lijevu stranu na zajednički imenilac, zamijeni $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ sa 1 i skrati dobiveni razlomak.

18. Uzmi lijevu stranu u obliku $\dfrac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$ itd.

19. a) $(2-\sin^2\alpha)(1+2\operatorname{tg}^2\alpha) = (2-\sin^2\alpha)\left(1+\dfrac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right) =$

$= (2-\sin^2\alpha)\dfrac{\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{2-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}[\cos^2\alpha+2(1-\cos^2\alpha)] =$

$= \dfrac{2\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}(2-\cos^2\alpha) = (2+\operatorname{tg}^2\alpha)(2-\cos^2\alpha).$

20. a) Piši izraz u obliku $(\sin^2 x+\cos^2 x)^2 = 1$.

b) Izraz pišemo u obliku $(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)+$
$+3\sin^2 x\cos^2 x = [(\sin^2 x+\cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x]+3\sin^2 x\cos^2 x =$
$= (\sin^2 x+\cos^2 x)^2 = 1.$

c) Dovedi izraz na oblik $(\sin^2 x+\cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x + 2\sin^2 x\cos^2 x\cdot$
$\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x) = 1.$

d) Imamo: $3\sin^4 x+3\cos^4 x-2(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+$
$+\cos^4 x) = (\sin^2 x+\cos^2 x)^2 = 1.$

21. a)
22. a)
23. $\frac{si}{co}$
24. a)
26. a)
27. a)
$\frac{1}{}$
28. a)
29. a)
31. a)
32. a)
33. a)
35. a)
36. D
čl
b
37. P
38. a)
39. a)
40. a)

21. a) Imamo: $\sin\alpha\,(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\sin\alpha\cdot 1=\sin\alpha$ b) $\cos\alpha$.

22. a) $\sin\alpha\,(1-\cos^2\alpha)=\sin^3\alpha$ b) $\cos^3\alpha$.

23. $\dfrac{\sin^2\alpha\,(1-\sin^2\alpha)}{\cos^2\alpha\,(1-\cos^2\alpha)}=\dfrac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}=1.$

24. a) $|\cos\alpha|$ b) $|\sin\alpha|$. **25.** 2.

26. a) $\operatorname{ctg}^2\alpha$ b) $\operatorname{tg}\alpha$ c) $2\operatorname{ctg}^2\alpha$.

27. a) Ako dovedeš izraz na najmanji zajednički imenilac, dobićeš

$$\frac{1+\sin\alpha+1-\sin\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{2}{\cos^2\alpha}.$$ b) $\dfrac{2}{\sin^2\alpha}$.

28. a) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ b) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ c) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ d) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

29. a) 0 b) 0. **30.** a) $2\sin\alpha$ b) $2\cos\alpha$.

31. a) $\dfrac{1}{\sin\alpha}$ b) $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ c) $-\dfrac{1}{\sin\alpha}$ d) $-\dfrac{1}{\cos\alpha}$.

32. a) $\sin\alpha$ b) $\cos\alpha$ c) $-\sin\alpha$ d) $-\cos\alpha$.

33. a) -1 b) -1. **34.** a) 2 b) 2.

35. a) $\dfrac{\sin^2\alpha\,(1-\cos^2\beta)}{\sin^2\beta\,(1-\cos^2\alpha)}=1$ b) 1 c) 1.

36. Dovedi prva dva člana na zajednički imenilac $\cos^2\alpha$ a preostala dva člana na $1-\sin^2\alpha$. Novi zajednički imenilac je $\cos^2\alpha$. Kad se oslobodiš svih zagrada i izvršiš redukciju, dobićeš 2.

37. Postupi na sličan način kao i u prethodnom zadatku; rezultat 1.

38. a) $\sin\alpha$ b) $\cos\alpha$ c) $\cos\alpha$ d) $\sin\alpha$ e) $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ f) $\dfrac{1}{\sin\alpha}$.

39. a) $\sin^3\alpha\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\cos^3\alpha=\cos\alpha\,(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\cos\alpha$ b) $\sin\alpha$.

40. a) $\sin\alpha\cos\alpha$ b) $\sin\alpha\cos\alpha$.

41. a) $\cos\alpha$ b) 1. **42.** a) $\frac{1}{\cos\alpha}$ b) $\frac{1}{\sin\alpha}$. 59.

43. a) $\sin^2\alpha$ b) $\cos^2\alpha$. 60.

44. a) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ b) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$ c) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ d) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$.

45. $\frac{1}{2}$. **46.** a) $\operatorname{tg}^2\alpha$ b) $\frac{2}{\cos^2\alpha}$ c) $\frac{2}{\sin^2\alpha}$.

47. a) $\operatorname{tg}\alpha$ b) $\operatorname{ctg}\alpha$. **48.** a) i b) $2\operatorname{tg}\alpha$ c) i d) $2\operatorname{ctg}\alpha$.

49. a) $\operatorname{tg}\alpha$ b) $-\operatorname{tg}\alpha$. **50.** a) $2\operatorname{tg}^2\alpha$ b) $2\operatorname{ctg}^2\alpha$.

51. a) $-2\operatorname{tg}^2\alpha$ b) $2\operatorname{ctg}^2\alpha$. 61.

52. a) Dovedemo li razlomke na zajednički imenilac i izvršimo redukciju, dolazimo do izraza $\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}$ koji skraćujemo sa $\cos\alpha$ uz pretpostavku da je $\cos\alpha\neq 0$; tako dolazimo do rezultata $2\operatorname{tg}\alpha$. b) $2\operatorname{ctg}\alpha$ ako je $\sin\alpha\neq 0$.

53. Dovedi najprije drugi i treći razlomak na zajednički imenilac $1-\sin^2\alpha$. Poslije sređivanja prelazi zadani izraz u oblik

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}-\frac{3\sin^2\alpha+1}{1-\sin^2\alpha}=\frac{1-3\sin^2\alpha-1}{\cos^2\alpha}=-3\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=-3\operatorname{tg}^2\alpha.$$ 62.

54. Dovedi najprije zadnja dva člana zadanog izraza na zajednički imenilac $1-\sin^2\alpha$, pojednostavi dobiveni izraz pa zatim sve dovedi na zajednički imenilac $\cos^2\alpha$. Izlazi rezultat $-\operatorname{tg}^2\alpha$. 63.

55. Prva dva razlomka dovedi na zajednički imenilac $\sin^2\alpha$ a ostala dva na $1-\cos^2\alpha$. Sredi svaki od dobivenih izraza pa zatim dovedi sve na zajednički imenilac $\sin^2\alpha$. Izlazi na kraju $\operatorname{ctg}^2\alpha$. 64.

56. $-\operatorname{tg}\alpha$. **57.** $2\operatorname{ctg}\alpha$. 65.

58. a) Imamo: $\frac{(1-\sin^2\alpha)(1+\sin^2\alpha)-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}=\frac{\cos^2\alpha(1+\sin^2\alpha)-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}=$

$$=\frac{1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha.$$ b) $2\operatorname{ctg}^2\alpha$.

59. **a)** Rastavi izraz $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)$ i skrati. Rezultat: $\operatorname{tg}\alpha$. **b)** $\operatorname{ctg}\alpha$.

60. **a)** Imamo: $\dfrac{\sin^4\alpha(1-\sin^2\alpha)+\cos^4\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^4\alpha}=$

$$=\frac{\sin^4\alpha\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}=\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{\cos^4\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha.$$

b) Brojilac se može pisati u obliku $(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)-1=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1-\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$

$=\sin^4\alpha+(1-\sin^2\alpha)^2-1-\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)=3\sin^4\alpha-3\sin^2\alpha.$

Na taj način zadani razlomak dovodimo na oblik

$$\frac{3\sin^2\alpha(\sin^2\alpha-1)}{\cos^4\alpha}=-3\operatorname{tg}^2\alpha.$$

61. **a)** Kvadriranjem svake jednačine nalazimo $x^2=9\cos^2 t$ i $y^2=9\sin^2 t$. Sabiranjem tih jednačina izlazi: $x^2+y^2=9(\sin^2 t+\cos^2 t)$ ili, kao rezultat tražene eliminacije, $x^2+y^2=9$. **b)** $x^2+y^2=r^2$ **c)** Iz prve jednačine je $\dfrac{x}{5}=\cos t$ a iz druge je $\dfrac{y}{3}=\sin t$; kvadriranjem i sabiranjem tih jednačina izlazi rezultat eliminacije, i to: $\left(\dfrac{x}{5}\right)^2+\left(\dfrac{y}{3}\right)^2=1$. **d)** $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2=1$. **e)** Iz jednačina je $\dfrac{x-5}{3}=\cos t$ i $\dfrac{y-7}{3}=\sin t$; postupkom analognim u prethodnim zadacima nalazimo: $(x-5)^2+(y-7)^2=9$. **f)** $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$.

62. **a)** 0,74703 **b)** 0,91236 **c)** 0,73547 **d)** 1,1918
e) 0,90753 **f)** 0,36379 **g)** 5,6713 **h)** 0,65355.

63. **a)** 0,41151 **b)** 0,80696 **c)** 0,85006 **d)** 1,3424
e) 0,83196 **f)** 0,65100 **g)** 2,4939 **h)** 0,16883.

64. **a)** $\alpha=41°20'$ **b)** $\alpha=17°$ **c)** $\alpha=24°$ **d)** $\alpha=43°30'$
e) $\alpha=52°30'$ **f)** $\alpha=63°30'$ **g)** $\alpha=47°30'$ **h)** $\alpha=57°40'$

65. **a)** $\alpha=77°02'$ **b)** $\alpha=31°02'$ **c)** $\alpha=31°31'$ **d)** $\alpha=67°28'$.

2. Rješavanje pravouglog trougla (pravokutnog trokuta) pomoću prirodnih vrijednosti trigonometrijskih funkcija

Napomena: uz svaki zadatak nacrtaj odgovarajuću sliku.

66. **a)** Imamo: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $a = c\sin\alpha = 5\sin 36°\,52' = 3$, $b = c\cos\alpha = 4$, $P = \frac{ab}{2} = 6$, $\beta = 90° - \alpha = 53°\,8'$. **b)** $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$, $b = a\operatorname{ctg}\alpha = 3\operatorname{ctg}36°\,52' = 4$. Hipotenuzu c možeš odrediti iz relacije $c = \frac{a}{\sin\alpha}$ ili pomoću Pitagorine teoreme $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$, $P = \frac{ab}{2} = 6$, $\beta = 90° - \alpha$. **c)** $b = c\sin\beta = 5$, $a = c\cos\beta = 12$, $P = \frac{ab}{2} = 30$, $\alpha = 90° - \beta = 67°\,23'$ **d)** $a = b\operatorname{ctg}\beta = 63$, $c = 65$, $P = 504$.

67. **a)** $b = 63$, $c = 65$, $P = 504$ **b)** $b = 16$, $c = 65$, $P = 504$
c) $a = 20$, $c = 29$, $P = 210$ **d)** $a = 13$, $c = 85$, $P = 546$.

68. **a)** $b = 63$, $P = 504$, $\alpha = 14°\,15'$ **b)** $a = 3$, $\alpha = 36°\,52'$, $P = 6$
c) $c = 29$, $P = 210$, $\alpha = 43°\,36'$ **d)** $b = 84$, $P = 546$, $\beta = 81°\,12'$.

69. **a)** $a = 6$, $c = 10$, $\alpha = 36°\,52'$, $P = 24$
b) $b = 36$, $c = 39$, $P = 270$, $\alpha = 22°\,37'$
c) $a = 20$, $b = 48$, $P = 480$, $\alpha = 22°\,37'$
d) $a = 40$, $b = 42$, $P = 840$, $\alpha = 43°\,36'$.

70. **a)** $b = 4$, $c = 5$, $\alpha = 36°\,52'$ **b)** $a = 9$, $c = 41$, $\alpha = 12°\,41'$
c) $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$ **d)** $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$.

71. a) Imamo: $\cos\beta = \frac{p}{a} = \frac{3}{5}$; odavde je $\beta = 53°\,8'$, $\alpha = 36°\,52'$, $b = a\,\mathrm{tg}\,\beta = a\,\mathrm{ctg}\,\alpha = 4$. Hipotenuzu c možemo naći na razne načine jer je $c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \sqrt{a^2+b^2} = 5$; $P = \frac{ab}{2} = 6$.

b) $\beta = 90° - \alpha = 53°\,8'$, $a = \frac{p}{\cos\beta} = 6$, $b = a\,\mathrm{ctg}\,\alpha = 8$, $c = \sqrt{a^2+b^2} = 10$ ili se c nađe iz relacije $c = \frac{a}{\sin\alpha}$ ili $c = \frac{b}{\cos\alpha}$. c) $\beta = 67°\,23'$, $b = \frac{h}{\sin\alpha} = 12$, $a = \frac{h}{\sin\beta}$ ili praktičnije $a = b\,\mathrm{tg}\,\alpha = 5$, $c = 13$, $P = 30$.

d) $\alpha = 36°\,52'$, $b = \frac{q}{\cos\alpha} = 20$, $a = b\,\mathrm{tg}\,\alpha = 15$, $c = \sqrt{a^2+b^2} = 25$, $P = 150$.

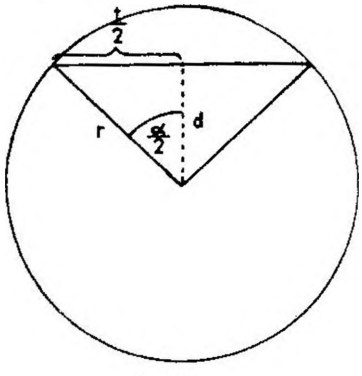
72. a) $\beta = 90° - \frac{\alpha}{2} = 75°\,45'$, $b = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = 65$, $P = \frac{ah_a}{2} = \frac{ab\sin\beta}{2} = 504$.

b) $a = 18$, $P = 180$, $\alpha = 180° - 2\beta = 25°\,22'$.

c) $b = 85$, $a = 168$, $\alpha = 162°\,24'$, $P = 546$.

d) $a = \frac{h_b}{\sin 67°\,23'} = 13$, $b = \frac{a}{2\cos\beta}$, $P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ab\sin\beta}{2}$.

73. Tetiva $t = 2r\sin\frac{\alpha}{2}$, a rastojanje od središta $d = r\cos\frac{\alpha}{2}$ (slika 30).



Sl. 30

74. $r = \frac{t}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$, $d = \frac{t}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$.

75. Radijus kružnice je $r = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Traženi ugao daje relacija $\sin\frac{\beta}{2} = \frac{b}{a}\sin\frac{\alpha}{2}$.

76. Tangente zatvaraju ugao α. Tada je $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{d}$, $\alpha=25°\,22'$.

77. $a=d\cos\alpha$, $b=d\sin\alpha$.

78. $d=\dfrac{a}{\sin\frac{\varphi}{2}}$, $b=a\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$.

79. $R=29$ kN. Uglovi iznose $43°36'$ i $46°24'$.

80. Označimo li sa d_1 i d_2 dijagonale a sa α ugao nasuprot dijagonale d_2, tada je $d_1=2a\cos\frac{\alpha}{2}$ i $d_2=2a\sin\frac{\alpha}{2}$.

81. Visina tornja je $d\operatorname{tg}\alpha=20\,\text{m}$.

82. Dužina sjene je $d\operatorname{ctg}\alpha=40\,\text{m}$.

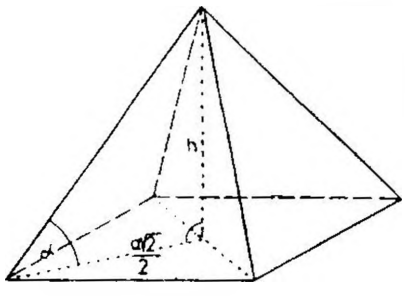
83. Iz relacije $\cos\alpha=\frac{d'}{d}$ nalazimo $\alpha=53°\,7'$.

84. Projekcija $d'=d\cos\alpha=63$.

85. Traženi ugao je $\alpha=12°\,41'$.

86. Visina valjka $h=a\sin\alpha$. Zapremina (volumen) iznosi $V=\frac{a^3}{4}\pi\sin\alpha=532\,349{,}58\,\pi\,\text{cm}^3$.

87. Dijagonala baze piramide je $a\sqrt{2}$; visina piramide (sl. 31) je $h=\frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\alpha$; tražena zapremina je $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}\operatorname{tg}\alpha$.



Sl. 31

88. Visina je $b\sin\alpha$, osnovna ivica (brid) $a=\sqrt{2}\,b\cos\alpha$, a tražena zapremina $V=\dfrac{2\,b^3\sin\alpha\cos^2\alpha}{3}$.

89. Polupre\u010dnik (polumjer) baze kupe (sto\u0161ca) je $r = s\cos\alpha$, visina $h = s\sin\alpha$ a tra\u017eena zapremina $V = \frac{s^3\pi\sin\alpha\cos^2\alpha}{3}$.

90. Radijus baze $r = h\operatorname{ctg}\alpha$ a zapremina $V = \frac{h^3\pi\operatorname{ctg}^2\alpha}{3}$.

91. Visina kupe je $h = \frac{d}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ a zapremina $V = \frac{d^3\pi}{24}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

92. Polupre\u010dnik baze kupe je $r = b\cos\alpha$, visina $h = b\sin\alpha$ a tra\u017eenu zapreminu nalazimo iz formule $V = \frac{b^3\pi\sin\alpha\cos^2\alpha}{3}$.

3. Opšta definicija trigonometrijskog ugla. Trigonometrijske funkcije bilo kojeg ugla. Redukcija na prvi kvadrant. Grafici trigonometrijskih funkcija

93. **a)** $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ **b)** $\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi$

c) $\frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$ **d)** $\frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi.$

94. **a)** $\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{18}$ **b)** $\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{36}, \frac{3\pi}{8}, \frac{2\pi}{15}.$

95. **a)** $4\pi, 6\pi, 8\pi$ **b)** $3\pi, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}.$

96. **a)** 180°, 90°, 270°, 360° **b)** 30°, 60°, 45°, 36°

c) 120° 240°, 300°, 150° **d)** 210°, 20°, 330°, 10°.

97. **a)** 540°, 720°, 900°, 1 080° **b)** 420°, 480°, 600°, 660°

c) 450°, 630°, 810°, 990° **d)** 405°, 495°, 585°, 675°.

98. Uglu α suprotan je ugao $-\alpha$. Ugao α i njemu suprotan ugao $-\alpha$ su simetrični s obzirom na osu x. **a)** $-30°$ **b)** $-45°$ **c)** $-120°$

d) $-150°$ **e)** $-\frac{\pi}{3}$ **f)** $-\frac{\pi}{2}$ **g)** $-\frac{3\pi}{4}$ **h)** $-\alpha$.

99. Uglu α dijametralno suprotan ugao je $\alpha+180°$ (i $\alpha-180°$) ili, ako uglove mjerimo u lučnoj mjeri, $\alpha+\pi$ (i $\alpha-\pi$). **a)** $\frac{7\pi}{6}$ **b)** 225°

c) $\frac{4\pi}{3}$ **d)** 300°.

100. Uglu α komplementan je ugao $90°-\alpha$ ili, u lučnoj mjeri, $\frac{\pi}{2}-\alpha$. **a)** $60°$ **b)** $\frac{\pi}{4}$ **c)** $40°$ **d)** $\frac{7\pi}{18}$ **e)** $-60°$ **f)** $-630°$ **g)** $130°$ **h)** $\frac{2\pi}{3}$.

101. Uglu α suplementan je ugao $180°-\alpha$, odnosno $\pi-\alpha$. **a)** $\frac{5\pi}{6}$ **b)** $135°$ **c)** $\frac{4\pi}{3}$ **d)** $-70°$ **e)** $880°$.

102. **a)** $\sin 120° = \sin(180°-60°) = \sin 60° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ili $\sin 120° = \sin(90°+30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg} 120° = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} 120° = -\operatorname{ctg} 60° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) $\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1$; $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = -1$.

c) $\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$.

d) $\sin\frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$; $\cos\frac{7\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{6} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

e) $\sin\frac{5\pi}{4} = \sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} = 1$; $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4} = 1$.

f) $\sin 240° = \sin(180° + 60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, ili $\sin 240° = \sin(270° -$ 104.

$-30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg} 240° =$

$= \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} 240° = \operatorname{ctg} 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

g) $\sin 300° = \sin(360° - 60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; ili $\sin 300° =$

$= \sin(270° + 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 300° = \cos 60° =$ 105.

$= \frac{1}{2}$; $\operatorname{tg} 300° = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} 300° = -\operatorname{ctg} 60° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

h) $\sin \frac{7\pi}{4} = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \frac{7\pi}{4} =$ 106.

$= \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \frac{7\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} =$

$= \operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -1$; $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{4} = -1$. 107.

108.

103. **a)** $\sin(-30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$; $\cos(-30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\operatorname{tg}(-30°) = -\operatorname{tg} 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{ctg}(-30°) = -\operatorname{ctg} 30° = -\sqrt{3}$.

U ostalim zadacima funkcije sinus, kosinus, tangens i kotangens imaju redom ove vrijednosti:

b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1,$

c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 109.

d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}$

e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 1$

f) $\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}$

g) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}$

h) $\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}.$

104. **a)** $f(0)=\dfrac{\sin 0-1}{\cos 0+1}=-\dfrac{1}{2}$ **b)** $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}=-\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=$

$=2\sqrt{2}-3$ **c)** $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sin\frac{\pi}{3}-1}{\cos\frac{\pi}{3}+1}=\dfrac{\sqrt{3}-2}{3}$

d) $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-2.$

105. **a)** $f(0)=-\dfrac{1}{2}$ **b)** $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}-2}{2}$ **c)** $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$

d) Funkcija nije definirana za $x=\dfrac{\pi}{2}$, jer je $\cos\dfrac{\pi}{2}=0$.

106. **a)** $-1-\dfrac{1}{2}+1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$ **b)** $-\dfrac{1}{2}+0-1+1=-\dfrac{1}{2}$

c) $2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)-3\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)+2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)-(-1)=\sqrt{3}-1$ **d)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

107. **a)** $\dfrac{1}{2}$ **b)** 0 **c)** $\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{4}$ **d)** $-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

108. **a)** Postoje dva ugla α u intervalu od $0°$ do $360°$ za koje je $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ i to $\alpha_1=30°$ i $\alpha_2=180°-30°=150°$.

b) $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ za $\alpha=45°$. Stoga je $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ za $\alpha_1=180°+45°=225°$ i $\alpha_2=360°-45°=315°$. **c)** $\alpha_1=240°$, $\alpha_2=300°$. **d)** $\alpha_1=210°$, $\alpha_2=330°$.

109. **a)** $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$ za $\alpha=60°$. Funkcija kosinus je negativna u drugom i trećem kvadrantu pa je $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$ za $\alpha_1=180°-60°=120°$ i $\alpha_2=180°+60°=240°$. **b)** Kosinus je pozitivan u prvom i četvrtom kvadrantu pa je $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ za $\alpha_1=45°$ i $\alpha_2=360°-45°=315°$. **c)** $\alpha_1=30°$, $\alpha_2=330°$ **d)** $\alpha_1=150°$, $\alpha_2=210°$.

110. **a)** $\operatorname{tg}\alpha = 1$ za $\alpha = 45°$. Funkcija tangens je negativna u drugom i četvrtom kvadrantu pa je $\operatorname{tg}\alpha = -1$ za $\alpha_1 = 180° - 45° = 350°$ i $\alpha_2 = 360° - 45° = 315°$. **b)** 150° i 330°
c) 60° i 240° **d)** 45° i 225°.

111. **a)** $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$ za $\alpha = 30°$. Ta funkcija je negativna u drugom i četvrtom kvadrantu pa je $\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{3}$ za $\alpha_1 = 360° - 30° = 330°$ i $\alpha_2 = 180° - 30° = 150°$. **b)** 45° i 225°
c) 120° i 300° **d)** 30° i 210°.

112. **a)** Za ugao α iz drugog kvadranta funkcija kosinus je negativna pa je $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\frac{4}{5}$. **b)** Kosinus je pozitivan u četvrtom kvadrantu pa je $\cos\alpha = +\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{12}{13}$.
c) $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\frac{11}{61}$.

113. **a)** Ako je α ugao trećeg kvadranta, onda je $\sin\alpha$ negativan pa je $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\frac{15}{17}$. **b)** $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\frac{9}{41}$
c) $\sin\alpha = +\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{7}{25}$.

114. **a)** Za ugao α iz drugog kvadranta je sinus pozitivan a kosinus negativan, pa je $\sin\alpha = +\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{8}{17}$, a $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = -\frac{15}{17}$. **b)** $\sin\alpha = -\frac{35}{37}$, $\cos\alpha = \frac{12}{37}$
c) $\sin\alpha = -\frac{11}{61}$, $\cos\alpha = -\frac{60}{61}$.

115. **a)** Sinus je u četvrtom kvadrantu negativan a kosinus pozitivan, pa je $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = -\frac{4}{5}$, a $\cos\alpha = +\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{3}{5}$
b) $\sin\alpha = -\frac{35}{37}$, $\cos\alpha = -\frac{12}{37}$ **c)** $\sin\alpha = -\frac{40}{41}$, $\cos\alpha = \frac{9}{41}$.

116. **a)** Ugao $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ pa je $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
b) $\alpha = \frac{11\pi}{6}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{3}$.

c) $\alpha=\frac{7\pi}{4}$, $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=-1$, $\operatorname{ctg}\alpha=-1$.

d) $\alpha=\frac{7\pi}{6}$, $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{3}$

e) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-1$

f) $\alpha=\frac{4\pi}{3}$, $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$

g) $\alpha=\frac{2\pi}{3}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{3}$

h) $\alpha=\frac{5\pi}{4}$, $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=1$.

117. a) Kako je α ugao II kvadranta, to je $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{21}{29}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=-\frac{20}{21}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{21}{20}$

b) $\cos\alpha=-\frac{24}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{7}{24}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{24}{7}$

c) $\cos\alpha=\frac{63}{65}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{16}{63}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{63}{16}$

d) $\cos\alpha=-\frac{45}{53}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{28}{45}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{45}{28}$.

118. a) Kako je α ugao II kvadranta, to je $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{45}{53}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}=-\frac{45}{28}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{28}{45}$

b) $\sin\alpha=-\frac{35}{37}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{35}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{12}{35}$

c) $\sin\alpha=-\frac{24}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{24}{7}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{7}{24}$

d) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{3}{4}$.

119. **a)** Kako je α ugao II kvadranta, to je $\sin\alpha = +\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}$.

b) $\sin\alpha = -\frac{40}{41}$, $\cos\alpha = -\frac{9}{41}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{9}{40}$

c) $\sin\alpha = -\frac{16}{65}$, $\cos\alpha = \frac{63}{65}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{63}{16}$

d) $\sin\alpha = \frac{11}{61}$, $\cos\alpha = -\frac{60}{61}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{60}{11}$.

120. **a)** Kako je $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ a $\cos(-\beta) = \cos\beta$, izraz prelazi u oblik $\sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cos\beta = 0$.

b) $-2\sin x\cos y$ **c)** $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$ **d)** $-2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$.

121. **a)** $2\cos\alpha + 3\sin\alpha$ **b)** $(a+b)\cos\alpha$ **c)** 0 **d)** $\cos(\alpha-\pi) = \cos[-(\pi-\alpha)] = \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$ pa izraz postaje 0.

122. **a)** $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = 0$ **b)** $-2\operatorname{ctg}\alpha$

c) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha$ pa izraz daje 0. **d)** Izraz prelazi u oblik $\operatorname{ctg}\alpha(-\operatorname{tg}\alpha) = -1$.

123. **a)** Imamo: $\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{-\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha(-\sin\alpha)}{-\sin\alpha} = -\sin\alpha + \sin\alpha = 0$ za $\sin\alpha \neq 0$, $\cos\alpha \neq 0$. **b)** $2\sin\alpha$ **c)** 0 **d)** 0.

124. **a)** Imamo: $-\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + 1 = -1+1 = 0$. **b)** Uzmi $\sin(-\alpha-\beta) = -\sin(\alpha+\beta)$, a $\cos(-\alpha-\beta) = \cos(\alpha+\beta)$. **c)** Izraz se dovede na oblik $-\sin^2(\alpha-\beta) - \cos^2(\alpha-\beta) + 1 = -1+1 = 0$.

125. **a)** $\sin 450° = \sin(90°+360°) = \sin 90° = 1$; $\cos 450° = \cos 90° = 0$; $\operatorname{tg} 450° = \operatorname{tg}(90°+2\cdot 180°) = \operatorname{tg} 90° = \pm\infty$; $\operatorname{ctg} 450° = \operatorname{ctg}(90°+2\cdot 180°) = \operatorname{ctg} 90° = 0$

b) $\sin 540° = \sin 180° = 0$; $\cos 540° = \cos 180° = -1$; $\operatorname{tg} 540° = \operatorname{tg}(0°+3\cdot 180°) = \operatorname{tg} 0° = 0$; $\operatorname{ctg} 540° = \operatorname{ctg}(0°+3\cdot 180°) = \operatorname{ctg} 0° = \pm\infty$. U ostalim zadacima funkcije sinus, kosinus, tangens i kotangens imaju redom ove vrijednosti: **c)** -1, 0, $\pm\infty$, 0

d) $0,\ 1,\ 0,\ \pm\infty$ **e)** $\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ \sqrt{3}$

f) $\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 1,\ 1$ **g)** $\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ -1,-1$

h) $\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\sqrt{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{3}$ **i)** $-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{3},\ \sqrt{3}$

j) $-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ -1,\ -1$ **k)** $-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ -\sqrt{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{3}$

l) $0,\ -1,\ 0,\ \pm\infty$.

126. **a)** U intervalu od $0°$ do $360°$ funkcija sinus prima vrijednost $\frac{1}{2}$ za $x=30°$ i $x=180°-30°=150°$. Zbog periodičnosti te funkcije (perioda iznosi $360°$ ili, što je isto, 2π) vrijednosti svih uglova za koje je sinus jednak $\frac{1}{2}$ sadrži relacija $x=30°+k\cdot 360°$ i $x=150°+k\cdot 360°$ ili, ako ugao uzimamo u lučnoj mjeri, $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ i $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ gdje je $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ldots$ **b)** $x=\pm 45°+k\cdot 360°$ ili možemo pisati $x=45°+k\cdot 360°$ i $x=360°-45°+k\cdot 360°$

c) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ za $x=60°$ pa je $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ za $x=180°+60°+k\cdot 360°=240°+k\cdot 360°$ i $x=300°+k\cdot 360°$ gdje k može biti svaki cijeli broj. **d)** $x=180°\pm 60°+k\cdot 360°$ **e)** $x=180°-60°+k\cdot 180°=(3k+2)\,60°$. **f)** $x=(4k+1)\,45°$

g) $x=(4k+1)\,45°$ **h)** $180°-60°+k\cdot 180°=(3k+2)\,60°$.

127. **a)** Razlomak nije definiran za one vrijednosti od x za koje je $\cos x-1=0$ a to je za $x=2k\pi$. U ostalim zadacima razlomci nisu definirani za: **b)** $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ **c)** $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ i $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

d) $x=180°\pm 45°+k\cdot 360°$ **e)** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ **f)** $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$

g) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ i $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ **h)** $x=\frac{2\pi}{3}+k\pi,\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ i $x=k\pi$

i) Imenilac možemo pisati u obliku $\sin x(\sin x - 1)$ pa razlomak nije definiran za $x = k\pi$ i $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. **j)** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

k) $x = k\pi$ **l)** $x = k\pi$ i $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

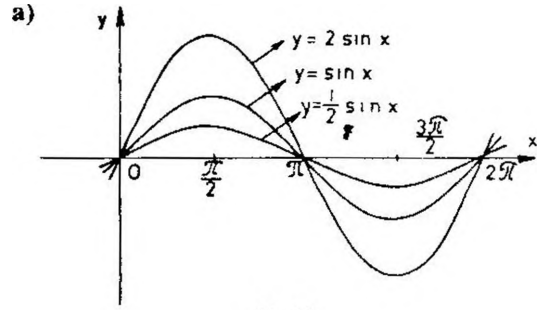
128. **a)** Razlomak ne smijemo skratiti za one vrijednosti od x za koje je $\sin x = 0$, a to je za $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ Ako je $\sin x \neq 0$ dobićemo, poslije skraćivanja, $\frac{1}{\cos x}$.

b) Ne smijemo skratiti za one vrijednosti od x za koje je $\sin x = -1$, a to je za $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, gdje je k bilo koji cijeli broj. **c)** Za $\cos x = 0$ razlomak nije definiran; ne smije se skratiti za $\cos x = 1$.

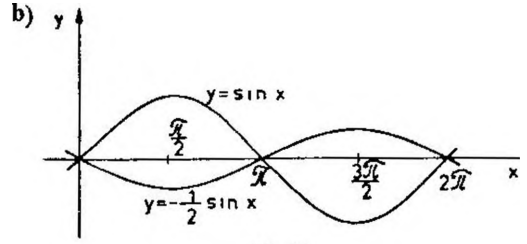
d) Za $x \neq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ i $x \neq \frac{7\pi}{2} + 2k\pi$ razlomak se smije skratiti i prima oblik $\sqrt{2}\sin x + 1$. **e)** $-\frac{1}{2\sin x - 1}$, $2\sin x + 1 \neq 0$

f) $-\frac{\cos x}{2\cos x + 1}$ za $x \neq 2k\pi$.

129. **a)** (slika 32) **b)** (sl. 33) **c)** (sl. 34) **d)** (sl. 35)
e) (sl. 36) **f)** (sl. 37) **g)** (sl. 38) **h)** (sl. 39)



Sl. 32



Sl. 33

razlomak

$+ k\pi$

x za koje

$\sin x \neq 0$

$\sin x = -1$,

c) Za

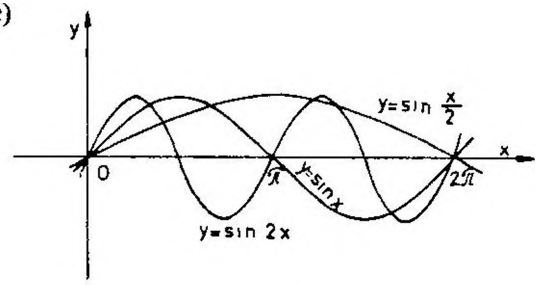
$\cos x = 1$.

skratiti i

$+ 1 \neq 0$

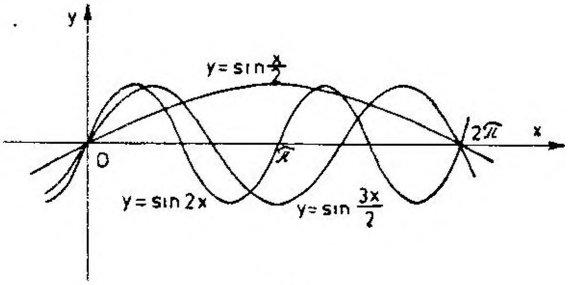
d) (sl. 35)
b) (sl. 39)

c)



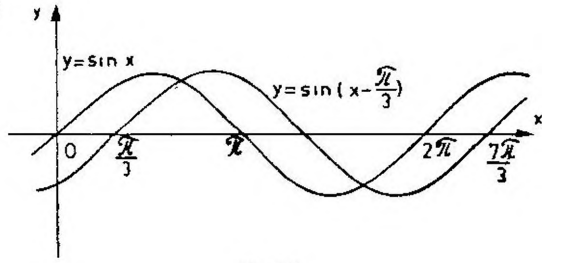
34

d)



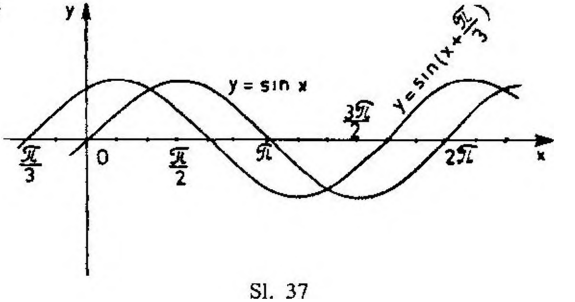
Sl. 35

e)



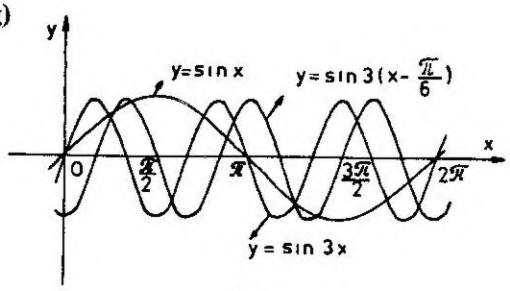
Sl. 36

f)



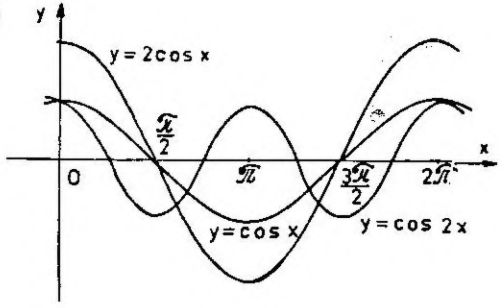
Sl. 37

g)



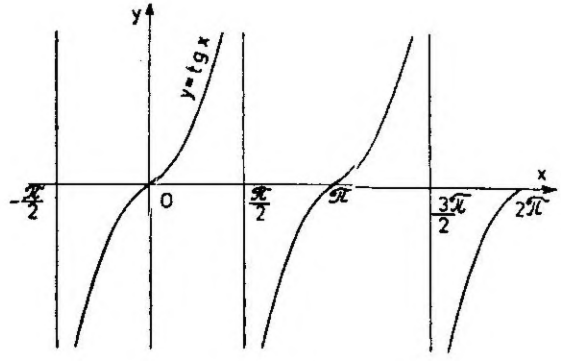
Sl. 38

h)



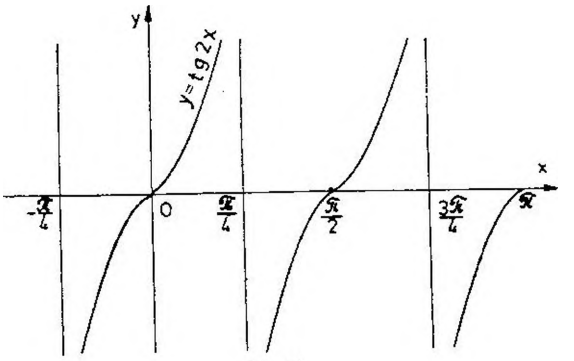
Sl. 39

130. a) (sl. 40)



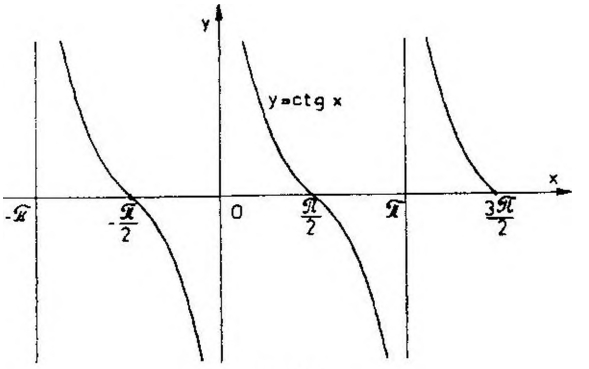
Sl. 40

b) (sl. 41)



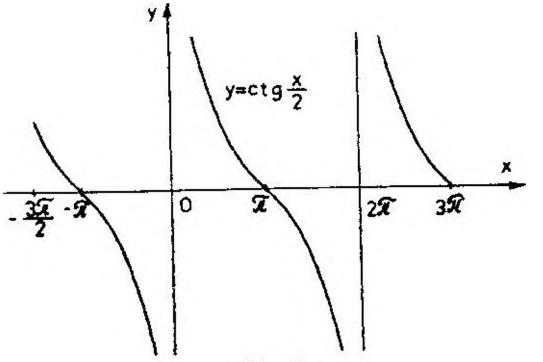
Sl. 41

c) (sl. 42)



Sl. 42

d) (sl. 43)



Sl. 43

131. **a)** Periodična **b)** neperiodična **c)** periodična **d)** neperiodična

132. **a)** $\sin 4x = \sin 4(x+p) = \sin(4x+4p)$ pa je $4p = 2\pi$ tj. $p = \frac{\pi}{2}$.

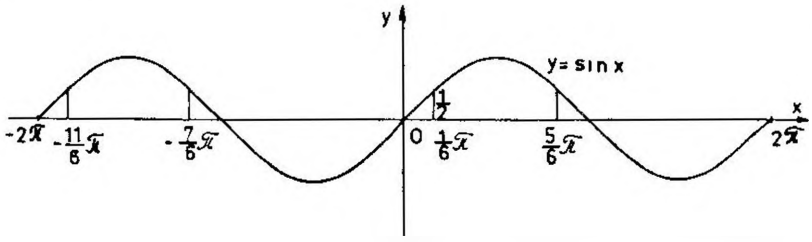
b) 6π **c)** $p = 3\pi$ **d)** 2π **e)** π **f)** $\frac{2\pi}{3}$ **g)** 14π

h) $\frac{\pi}{5}$ **i)** 2π **j)** 2π.

133. **a)** Kada cijeli broj k podijelimo brojem 5, dobićemo količnik (kvocijent) q i ostatak r pa je $k = 5q + r$, gdje je r jedan od brojeva $r = 0, 1, 2, 3, 4$. Imamo $\cos\frac{2k\pi}{5} = \cos\frac{2(5q+r)\pi}{5} = \cos\frac{2r\pi}{5}$ pa dobivamo vrijednosti $\cos 0$, $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{5}$, $\cos\frac{8\pi}{5}$. Međutim, kako je $\cos\frac{8\pi}{5} = \cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\frac{2\pi}{5}$ a $\cos\frac{6\pi}{5} = \cos\frac{4\pi}{5}$, izlaze samo tri različite vrijednosti, i to: $\cos 0$, $\cos\frac{2\pi}{5}$ i $\cos\frac{4\pi}{5}$

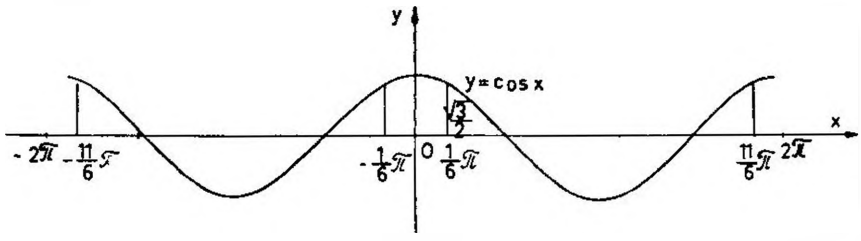
b) Pet i to: $\cos 0$, $\cos\frac{2\pi}{9}$, $\cos\frac{4\pi}{9}$, $\cos\frac{6\pi}{9}$, $\frac{8\pi}{9}$.

134. **a)** (sl. 44)



Sl. 44

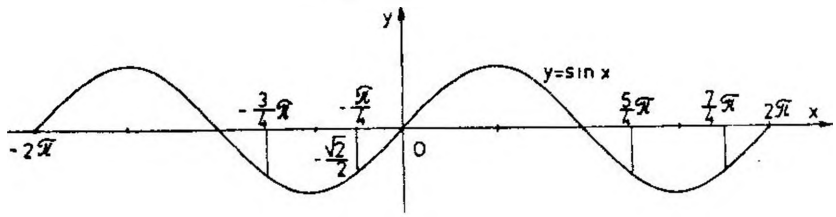
b) (sl. 45)



Sl. 45

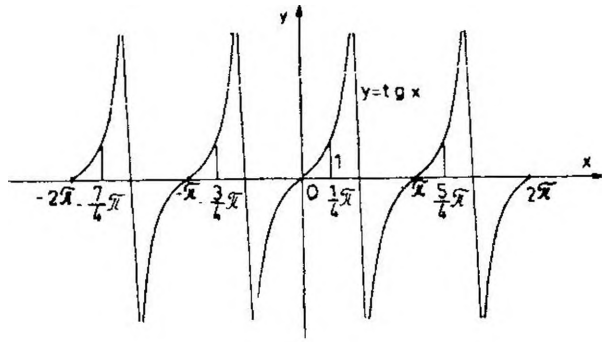
c) (sl. 46)

d) $x_1 = \pi$, $x_2 = -\pi$



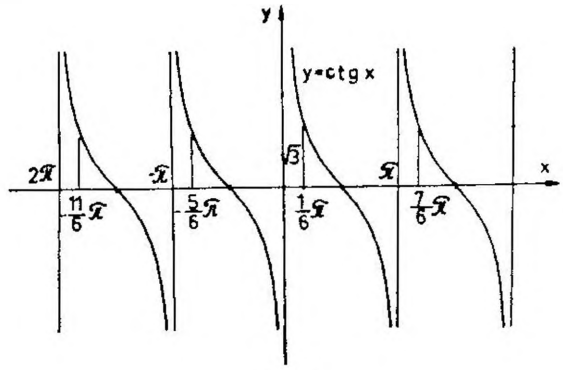
Sl. 46

e) (sl. 47)



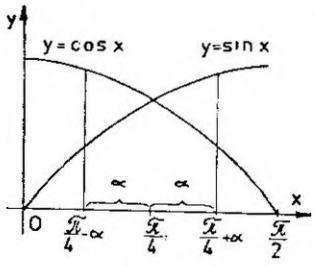
Sl. 47

f) (sl. 48)

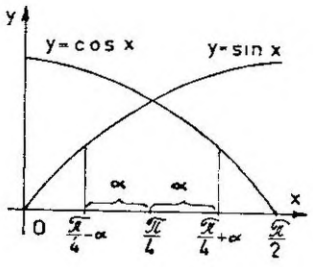


Sl. 48

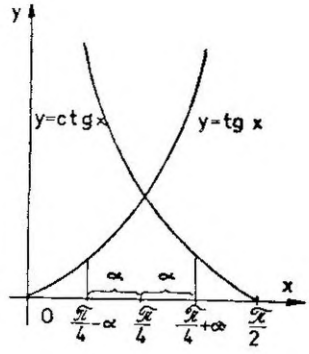
g) $x_1 = \frac{5\pi}{6}$, $x_2 = \frac{11\pi}{6}$, $x_3 = -\frac{\pi}{6}$, $x_4 = -\frac{7\pi}{6}$ h) $x_1 = \frac{3\pi}{4}$, $x_2 = \frac{7\pi}{4}$, $x_3 = -\frac{\pi}{4}$, $x_4 = -\frac{5\pi}{4}$. (Načini grafik!)



Sl. 49



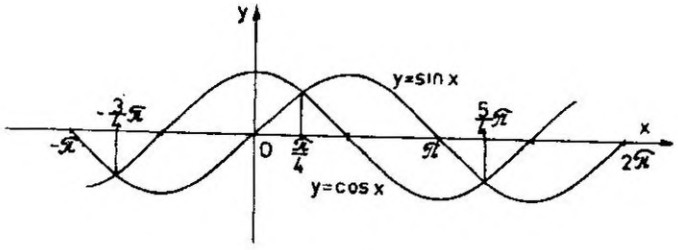
Sl. 50



Sl. 51

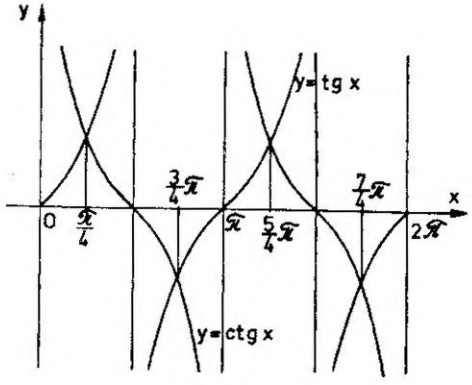
135. a) (sl. 49) **b)** (sl. 50) **c)** (sl. 51)

136. a) (sl. 52)



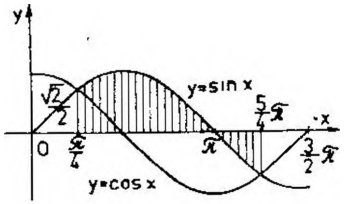
Sl. 52

b) (sl. 53)



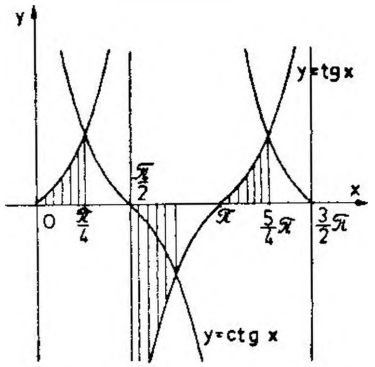
Sl. 53

c) (sl. 54)



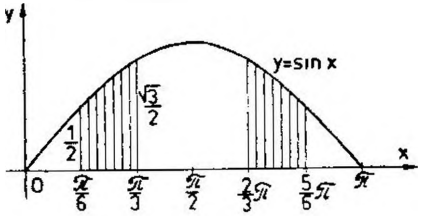
Sl. 54

d) (sl. 55)



Sl. 55

e) (sl. 56)

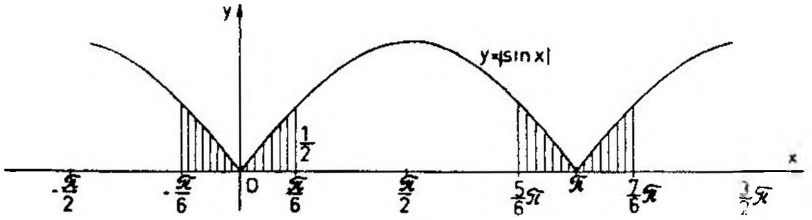


Sl. 56

f) $\frac{\pi}{4} < x > \frac{\pi}{2}$ i

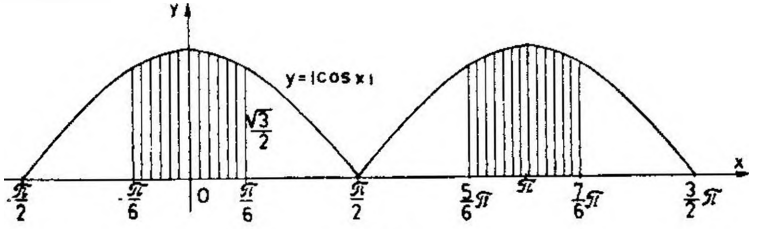
$\frac{3\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{4}$

g) (sl. 57)



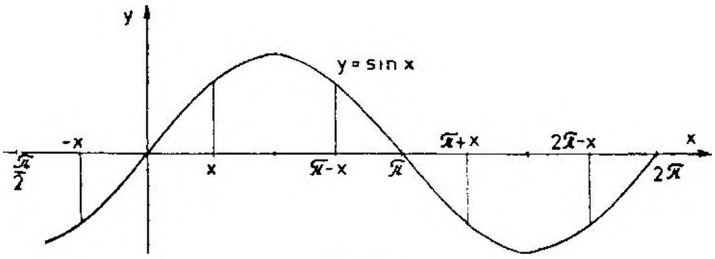
Sl. 57

h) (sl. 58)



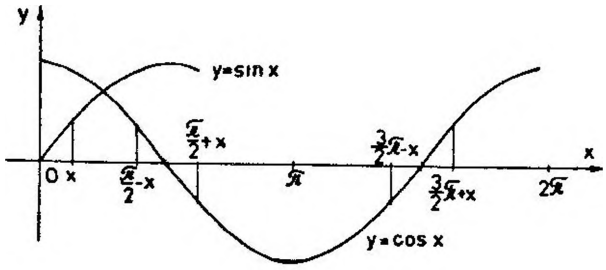
Sl. 58

137. **a)** (sl. 59)



Sl. 59

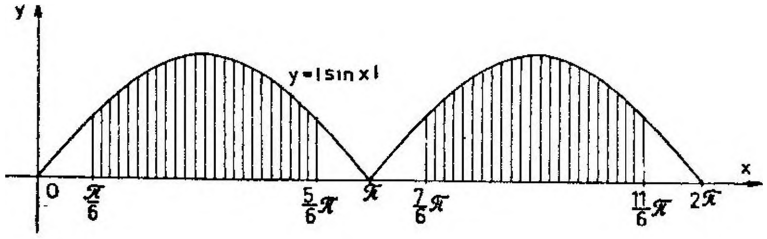
138. **a)** (sl. 60)



Sl. 60

139. $\pi < x < \frac{5\pi}{4}, \ \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi.$

140. $0 < x < \frac{\pi}{4}, \ \frac{3\pi}{4} < x < \pi.$



Sl. 61

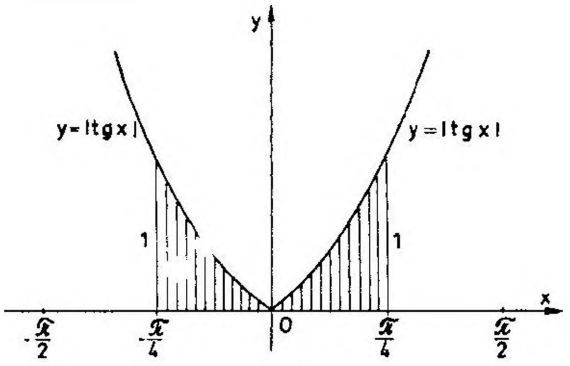
141. $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}, \ \frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}.$ (Sl. 61)

142. $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}.$ (sl. 62)

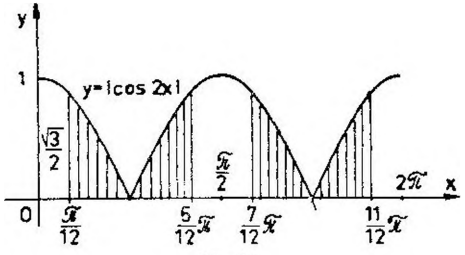
143.

144.

143. $\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12} < x < \frac{11\pi}{12}$. (sl. 63)

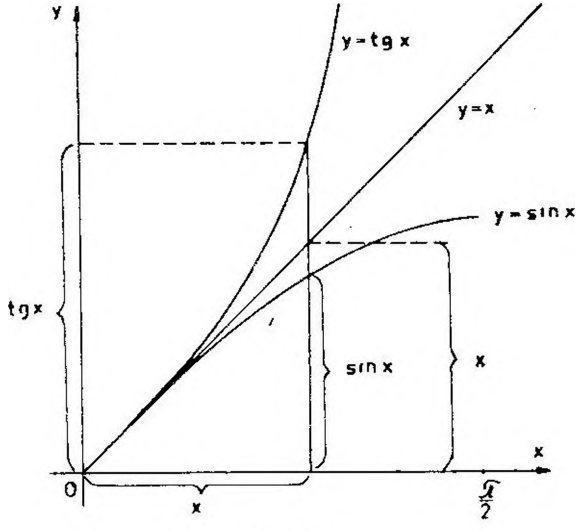


Sl. 62



Sl. 63

144. (sl. 64)



Sl. 64

4. Adiciona teorema (trigonometrijske funkcije binoma)

145. **a)** Prema adicionoj teoremi imamo: $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=$
$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=2\sin\alpha\cos\beta.$

146. **a)** Imamo: $\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta+$
$+\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos\beta(\sin\alpha+\cos\alpha)-\sin\beta(\cos\alpha+\sin\alpha)=$
$=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cos\beta-\sin\beta).$

d) Množenjem binoma izlazi $\cos\alpha\cos\beta+i\sin\alpha\cos\beta+i\cos\alpha\sin\beta+$
$+i^2\sin\alpha\sin\beta=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\sin\alpha\cos\beta)+\cos\alpha\sin\beta)=$
$=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta).$

147. **a)** Polazeći od lijeve strane imamo: $\cos^2\alpha-(1-\cos^2\beta)=\cos^2\alpha-$
$-\sin^2\beta=\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta=\cos^2\alpha(1-$
$-\sin^2\beta)-\sin^2\beta(1-\cos^2\alpha)=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta=$
$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=$
$=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$

b) Imamo: $\cos^2\alpha-\cos^2\beta=\cos^2\alpha(1-\cos^2\beta)-\cos^2\beta(1-\cos^2\alpha)=$
$=\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\alpha\cos^2\beta=-(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta-$
$-\cos\alpha\sin\beta)=-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta).$

c) $1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta=1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta=$
$=(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\beta)-\sin^2\alpha\sin^2\beta=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta$ itd.

d) Ako razvijemo lijevu stranu po adicionoj teoremi, dobijemo
$\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta=\cos^2\alpha(1-\sin^2\beta)-\sin^2\beta(1-\cos^2\alpha)$ itd.

e) $\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta=\sin\alpha\cos\alpha(\sin^2\beta+\cos^2\beta)+$
$+\sin\beta\cos\beta(\sin^2+\cos^2\alpha)=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+$
$+\sin\alpha\sin\beta)$ itd.

148. **a)** $\sin(30^\circ+\alpha)+\sin(30^\circ-\alpha)=\sin 30^\circ\cos\alpha+\cos 30^\circ\sin\alpha+$
$+\sin 30^\circ\cos\alpha-\cos 30^\circ\sin\alpha=2\sin 30^\circ\cos\alpha=2\cdot\frac{1}{2}\cos\alpha=\cos\alpha.$

150. **a)** $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

151. **a)** $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$.

152. **a)** $1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=1+\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=$

$=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

153. **a)** $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$.

154. **a)** $\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{1-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{1+\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$.

155. **a)** $\dfrac{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}=\dfrac{\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$.

156. $1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta=(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)=\left(1-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\right)\left(1+\right.$

$\left.+\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\right)=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\cdot\dfrac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=$

$=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

157. **a)** Imamo: $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$. Kako je $\cos\alpha=$

$=+\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{4}{5}$, $\cos\beta=+\sqrt{1-\sin^2\beta}=\dfrac{12}{13}$, to je $\sin(\alpha+\beta)=$

$=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{12}{13}+\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{5}{13}=\dfrac{56}{65}$. **b)** $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{33}{65}$.

158. Kako je $\sin\alpha=\frac{24}{25}$ a $\cos\beta=\frac{4}{5}$, to je $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-$ $-\cos\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}$. Budući da je $\sin(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$, a toliki je upravo i $\sin\beta$, slijedi da je $\alpha=2\beta$.

159. **a)** $\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$ pa je $\alpha-\beta=60°$ **b)** $\sin(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha+\beta=135°$

c) $\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha+\beta=45°$ **d)** $\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$, $\alpha-\beta=30°$

e) $\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$, $\alpha+\beta=60°$.

160. **a)** $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\sqrt{3}$, $\alpha+\beta=60°$ **b)** $\alpha+\beta=45°$

c) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=1$, $\alpha+\beta=45°$ **d)** $\alpha+\beta=45°$

e) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\alpha-\beta=30°$ **f)** $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=1$, $\alpha-\beta=45°$.

161. $\sin\beta=\frac{7\sqrt{2}}{26}$. Iz relacije $\alpha-\beta=45°$ je $\alpha=\beta+45°$, pa je $\sin\alpha=$ $=\sin(\beta+45°)=\sin\beta\cos45°+\cos\beta\sin45°=\frac{12}{13}$; $\cos\alpha=\frac{5}{13}$.

162. $\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{13}$, $\cos\beta=\cos(60°-\alpha)=\frac{23}{26}$.

163. $\sin\beta=\frac{3\sqrt{3}}{14}$, $\cos\beta=\frac{13}{14}$. **164.** $\sin\beta=\frac{23\sqrt{2}}{34}$, $\cos\beta=\frac{?}{34}$

165. Zamjenom zadanih veličina u formuli $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ dobićemo jednačinu $1=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}\operatorname{tg}\alpha}$ iz koje nalažimo $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$.

166. a) $\operatorname{tg}(\alpha+45°)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}45°}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}45}=-3$ b) $\dfrac{1}{3}$

c) $-\dfrac{8+5\sqrt{3}}{11}$ d) $\dfrac{5\sqrt{3}-8}{11}$.

167. Primijeni formulu $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

168. $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{1}{3}$. **169.** $\operatorname{tg}\alpha=2\sqrt{3}$. **170.** $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

171. $\sin\alpha=\dfrac{15\sqrt{3}}{26}$, $\cos\alpha=\dfrac{1}{26}$, $\sin\beta=\dfrac{4\sqrt{3}}{13}$, $\cos\beta=\dfrac{11}{13}$,

$\operatorname{tg}\beta=\dfrac{4\sqrt{3}}{11}$.

172. $\sin\gamma=\sin[180°-(\alpha+\beta)]=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=$

$=\dfrac{12}{13}\cdot\dfrac{4}{5}+\dfrac{5}{13}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{63}{65}$, $\cos\gamma=\dfrac{16}{65}$.

173. Iz prvih dviju jednačina je $\alpha+\gamma=135°$. Iz obrasca $\operatorname{tg}(\alpha+\gamma)=$

$=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma}$ naći ćeš $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{12}{5}$, $\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}(\alpha-90°)=$

$=-\operatorname{tg}(90°-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha=-\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{5}{12}$, $\sin\gamma=\dfrac{7\sqrt{2}}{26}$, $\cos\gamma=$

$=\dfrac{17\sqrt{2}}{26}$, $\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$, $\cos\alpha=-\dfrac{5}{13}$, $\sin\beta=\dfrac{5}{13}$, $\cos\beta=\dfrac{12}{13}$.

174. a) $\sin 75°=\sin(45°+30°)=\sin 45°\cos 30°+\cos 45°\sin 30°=$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$ b) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$ c) $\sin 105°=$

$=\sin(60°+45°)=\cdots$ Možeš poći i od relacije $\sin 105°=$

$=\sin(180°-75°)=\sin 75°$. d) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$ f) $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$.

175. **a)** $\operatorname{tg} 75^\circ = \dfrac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ} = 2 + \sqrt{3}$ **b)** $2 - \sqrt{3}$

c) $-(2 + \sqrt{3})$ **d)** $2 - \sqrt{3}$ **e)** $2 + \sqrt{3}$ **f)** $\sqrt{3} - 2$.

176. **a)** $\cos(30^\circ - \alpha) - \cos(30^\circ + \alpha) = \cos 30^\circ \cos\alpha + \sin 30^\circ \sin\alpha -$
$- \cos 30^\circ \cos\alpha + \sin 30^\circ \sin\alpha = 2 \sin 30^\circ \sin\alpha = \sin\alpha$.

b) Ako uzmeš $\sin(60^\circ + \alpha) = \cos[90^\circ - (60^\circ + \alpha)] = \cos(30^\circ - \alpha)$ i slično $\sin(60^\circ - \alpha) = \cos(30^\circ + \alpha)$, onda zadatak svodiš na zadatak **a)**.

177. **a)** $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \sin\dfrac{\pi}{2}\cos\alpha \pm \cos\dfrac{\pi}{2}\sin\alpha = \cos\alpha$

b), c) i **d)** vidi zadatak 138.

178. $\sin\alpha(\sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma) + \sin\beta(\sin\gamma\cos\alpha - \cos\gamma\sin\alpha) -$
$+ \sin\gamma(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) = \cdots = 0$.

179. **b)** $\cos\alpha + \cos\alpha\cos 120^\circ - \sin\alpha\sin 120^\circ + \cos\alpha\cos 240^\circ -$
$- \sin\alpha\sin 240^\circ = \cos\alpha - \cos\alpha\cos 60^\circ - \sin\alpha\sin 60^\circ - \cos\alpha\cos 60^\circ +$
$+ \sin\alpha\sin 60^\circ = \cos\alpha - 2\cos 60^\circ = 0$.

180. **a)** $\sin(45^\circ \pm \alpha) = \cos[90^\circ - (45^\circ \pm \alpha)] = \cos(45^\circ \mp \alpha)$

b) $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg}[90^\circ - (45^\circ + \alpha)] = \operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha)$ **c)** Ova relacija je transformirana relacija **b)**.

181. **a)** Drugi član lijeve strane možemo pisati u obliku $\sin(\alpha - 45^\circ) =$
$= -\sin(45^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha + 45^\circ)$, pa je $\sin^2(\alpha - 45^\circ) =$
$= \cos^2(\alpha + 45^\circ)$ tako da lijeva strana postaje $\sin^2(\alpha + 45^\circ) +$
$+ \cos^2(\alpha + 45^\circ)$, a to je 1.

182. **a)** $\operatorname{tg}(\alpha + 45^\circ) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg} 45^\circ} = \dfrac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha}$ **b)** Primjenom adicione teoreme dobivamo $\operatorname{tg}(\alpha + 60^\circ) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg} 60^\circ}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg} 60^\circ} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}$.

183. **a)** Primjenom adicione teoreme lijeva strana prelazi u $\sin^2\alpha +$
$+ (\sin\alpha\cos 120^\circ + \cos\alpha\sin 120^\circ)^2 + (\sin\alpha\cos 120^\circ - \cos\alpha\sin 120^\circ)^2 =$
$= \sin^2\alpha + \left(-\dfrac{1}{2}\sin\alpha + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\sin\alpha - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)^2 =$

$$= \sin^2\alpha + \frac{1}{4}\sin^2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{3}{4}\cos^2\alpha + \frac{1}{4}\sin^2\alpha +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{3}{4}\cos^2\alpha = \frac{3}{2}\sin^2\alpha + \frac{3}{2}\cos^2\alpha = \frac{3}{2}.$$

184. **a)** $\sin[\alpha+(\beta+\gamma)] = \sin\alpha\cos(\beta+\gamma) + \cos\alpha\sin(\beta+\gamma)$ itd. Na kraju izlazi $\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$. **b)** $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$

c) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

$1 - \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta \neq 0$, a tangensi nisu beskonačni.

185. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}(90^\circ - \gamma) = \operatorname{ctg}\gamma$, $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\gamma}$.

Odavde izlazi $\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 1$ ako se oslobodimo razlomka i izraz sredimo.

186. **a)** Zadanu relaciju možemo pisati u obliku $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = 1$ odakle vidimo da je $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = 1$ tj. $\alpha - \beta = 45^\circ$. **b)** $\alpha + \beta = 45^\circ$.

187. **a)** $\dfrac{\sin(\alpha+\beta) - \cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha\cos\beta} = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta} =$

$= \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$ **b)** $-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$ **c)** $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$ **d)** $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

188. U svakom od zadataka **a)**, **b)**, **c)**, **d)** dobiće se $\operatorname{tg}\alpha$.

189. **a)** Primjenom adicione teoreme na svaki od članova brojioca i imenioca dobićemo $\dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \mp \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} =$

$= \dfrac{2\sin\alpha\cos\beta}{2\cos\alpha\cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha$ za gornje znakove, a za donje znakove dobijemo razlomak $\dfrac{2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta} = \operatorname{tg}\beta$. **b)** Za gornji znak izlazi $-\operatorname{ctg}\beta$, a za donji $-\operatorname{ctg}\alpha$.

190. **a)** Izraz se dobije ako se primijeni adiciona teorema na $\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]$. Slijedi: $\sin\beta$ **b)** $\cos\alpha$ **c)** $\cos\alpha$ **d)** $\sin\beta$.

191. **a)** Izraz se može pisati: $\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \cos^2\alpha \pm$ $\pm 2\cos\alpha\sin\beta + \sin^2\beta - 2(\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta) = 2$.

b) $2+4\sin\alpha\cos\beta$; izraz **b)** slijedi iz **a)** ako u ovome umjesto β uzmemo $180° + \beta$.

192. **a)** 2. Izraz slijedi iz izraza **a)** prethodnog zadatka ako umjesto α uzmemo $90° - \alpha$. **b)** 2; izraz slijedi iz izraza **b)** prethodnog zadatka ako umjesto α uzmemo $90° - \alpha$.

193. **a)** 0 **b)** 0; ovaj zadatak slijedi iz zadatkâ **a)** ako u ovome uzmemo $180° - \beta$ umjesto β.

194. **a)** 2 **b)** 2.

195. **a)** 2 **b)** 2; zadaci **a)** i **b)** slijede iz prethodnih zadataka **a)** i **b)** ako u ovima umjesto α uzmemo $90° - \alpha$.

196. **a)** Ako kvadriramo binome, uzmemo u obzir da je suma kvadrata sinusa i kosinusa bilo kojeg ugla 1 i izvršimo redukcije, dobićemo $\dfrac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta} = \dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)} = \operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)$. **b)** Razlomak se dovodi na oblik $\dfrac{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta \mp \cos\alpha\sin\beta} = \dfrac{\cos(\alpha\mp\beta)}{\sin(\alpha\mp\beta)} = \operatorname{ctg}(\alpha\mp\beta)$.

197. **a)** 2 **b)** -2.

198. **a)** Ako sistem rješavamo metodom jednakih koeficijenata, pomnožićemo prvu jednačinu sa $\cos\beta$, a drugu sa $\sin\beta$; ako se iza toga od prve jednačine oduzme druga i izluči zajednički faktor, izlazi: $x(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) = \sin\gamma\cos\beta - \cos\gamma\sin\beta$. Uz pretpostavku da je $\sin(\alpha-\beta)\neq 0$ nalazimo $x = \dfrac{\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$; analogno možemo naći $y = \dfrac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}$. **b)** Uz pretpostavku da je $\sin(\alpha+\beta)\neq 0$ izlazi: $x = \dfrac{\sin(\gamma+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$, $y = \dfrac{\sin(\alpha-\gamma)}{\sin(\alpha+\beta)}$.

199. **a)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $\cos 2\alpha$ **d)** $-\sin 2\alpha$ **e)** 0

f) $\cos\beta \sin(\alpha+\beta)$ **g)** $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **h)** $\frac{\cos(20^\circ-\alpha)}{\cos\alpha}$.

200. **a)** $-\frac{7}{17}$ **b)** $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$. **201.** **a)** $\frac{\sqrt{2}}{6}(2+\sqrt{5})$ **b)** $\frac{a-1}{a+1}$.

202. Iz $\cos(\alpha+\beta)=0{,}3$ i $\cos(\alpha-\beta)=0{,}8$ slijedi $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{4}$.

203. Imamo: $\sin(\beta-\gamma) = \sin[(\alpha-\beta)-(\alpha-\gamma)] =$
$= \sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\gamma) - \cos(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma) = a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2}$

204. $\frac{56}{65}$.

205. Pođi od relacije $\operatorname{tg}(\alpha+\beta-\gamma)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=$
$=1$ itd.

206. Uzmi u obzir da je $(\beta-\gamma)+(\gamma-\alpha)+(\alpha-\beta)=0$ i primijeni relaciju iz zadatka 184 **c)**.

207. Datu relaciju dovedi na oblik $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}$ ili $\operatorname{tg}\alpha=$
$=-\operatorname{tg}(\beta+\gamma)=\operatorname{tg}[-(\beta+\gamma)]$. Odavde je $\alpha=-(\beta+\gamma)+k\pi$ tj. $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$.

208. **a)** Pođi od $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\beta+\gamma)$, primijeni adicionu teoremu i izrazi funkciju tangens pomoću kotangens. **b)** Na lijevoj strani zamijeni $\alpha=\beta+\gamma$ itd.

5. Trigonometrijske funkcije udvojenog ugla (kuta)

209. a) $\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha$ b) $2\sin 3x\cos 3x$

c) $2\sin 4\alpha\cos 4\alpha$ d) $2\sin 5x\cos 5x$

e) $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ f) $2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}$

g) $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ h) $2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$.

210. a) $\cos 4\alpha = \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha$ b) $\cos^2 3x - \sin^2 3x$

c) $\cos^2 4\alpha - \sin^2 4\alpha$ d) $\cos^2 5x - \sin^2 5x$

e) $\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ f) $\cos^2\frac{3x}{2} - \sin^2\frac{3x}{2}$

g) $\cos^2\frac{a+b}{2} - \sin^2\frac{a+b}{2}$ h) $\cos^2\frac{x-2y}{2} - \sin^2\frac{x-2y}{2}$.

211. a) $\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{2\operatorname{tg} 2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}$ b) $\frac{2\operatorname{tg} 3\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 3\alpha}$ c) $\frac{2\operatorname{tg} 4x}{1-\operatorname{tg}^2 4x}$

d) $\frac{2\operatorname{tg} 5y}{1-\operatorname{tg}^2 5y}$ e) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ f) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{3\alpha}{2}}$

g) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}$ h) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x-y}{2}}$.

212. a) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2 2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg} 2\alpha}$ b) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2 3\alpha - 1}{2\operatorname{ctg} 3\alpha}$ c) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2 4x - 1}{2\operatorname{ctg} 4x}$

d) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2 \dfrac{\alpha}{2} - 1}{2\operatorname{ctg} \dfrac{\alpha}{2}}$ e) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2 \dfrac{3x}{2} - 1}{2\operatorname{ctg} \dfrac{3x}{2}}$ f) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2 \dfrac{\alpha+\beta}{2}}{2\operatorname{ctg} \dfrac{\alpha+\beta}{2}}$

g) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2 (a+b-2)}{2\operatorname{ctg} (a+b-2)}$.

213. a) $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$; $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{24}{25}$, $\cos 2\alpha =$

$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \dfrac{7}{25}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{24}{7}$, $\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{7}{24}$ b) $\sin 2\alpha =$

$= \dfrac{240}{289}$, $\cos 2\alpha = -\dfrac{161}{289}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = -\dfrac{240}{161}$ c) $\sin 2\alpha = \dfrac{120}{169}$,

$\cos 2\alpha = \dfrac{119}{169}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{120}{119}$ d) $\dfrac{24}{25}$, $\dfrac{7}{25}$, $\dfrac{24}{7}$.

214. $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{4}{3}$, a) $\sin 2\alpha = -2 \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{3}{5} = -\dfrac{24}{25}$

b) $\cos 2\alpha = -\dfrac{7}{25}$ c) $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{24}{7}$.

215. a) $\cos\alpha = \pm\dfrac{a^2-1}{a^2+1}$, $\operatorname{tg}\alpha = \pm\dfrac{2a}{a^2-1}$, $\sin 2\alpha = \pm\dfrac{4a(a^2-1)}{(a^2+1)^2}$

$\cos 2\alpha = \pm\dfrac{a^4-6a^2+1}{(a^2+1)^2}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \pm\dfrac{4a(a^2-1)}{a^4-6a^2+1}$

b) $\sin 2\alpha = \pm\dfrac{4xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $\cos 2\alpha = \pm\dfrac{x^4-6x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2}$, $\operatorname{tg} 2\alpha =$

$= \pm\dfrac{4xy(x^2-y^2)}{x^4-6x^2y^2+y^4}$ c) $\sin 2\alpha = \pm\dfrac{4ab(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}$, $\cos 2\alpha =$

$= \pm\dfrac{a^4-6a^2b^2+b^4}{(a^2+b^2)^2}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \pm\dfrac{4ab(a^2-b^2)}{a^4-6a^2b^2+b^4}$.

216. $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2(\alpha+\beta) = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{4\sqrt{2}+7\sqrt{3}}{18}$.

217. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{3}$.

218. $\sin 3\alpha=\sin(\alpha+2\alpha)$ itd. Izlazi $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$.

219. $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$.

220. $\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$.

221. $\sin\alpha=\frac{2ab}{a^2b^2+1}$, $\sin 3\alpha=\frac{6a^5b^5-20a^3b^3+6ab}{(a^2b^2+1)^3}$.

222. $\cos 3\alpha=\frac{(a^2b^2-c^2)(a^4b^4-14a^2b^2c^2+c^4)}{(a^2b^2+c^2)^3}$.

223. Jednačinu $\cos 2\beta=-\frac{7}{25}$ pišemo u obliku $2\cos^2\beta-1=-\frac{7}{25}$;

odavde nalazimo $\cos\beta=\frac{3}{5}$; $\sin\beta=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{4}{3}$, $\sin\alpha=\sin 2\beta=$

$=2\sin\beta\cos\beta=\frac{24}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{24}{7}$, $\gamma=180°-3\beta$; $\sin\gamma=\sin 3\beta=$

$=\frac{44}{125}$, $\cos\gamma=-\cos 3\beta=-\frac{117}{125}$, $\operatorname{tg}\gamma=-\frac{44}{117}$.

224. $\frac{\alpha}{2}=45°+\frac{\gamma}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2$, $\frac{\beta}{2}=45°-\gamma$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{1}{7}$, $\operatorname{tg}\gamma=\frac{3}{4}$.

225. **a)** $\sin 4\alpha=2\sin 2\alpha\cos 2\alpha=2\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$ itd.

226. **a)** Možemo pisati $\sin 2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$. Podijelimo li brojilac i imenilac sa $\cos^2\alpha$, izlazi traženi identitet. **b)** Pođi od relacije $\cos 2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$ i postupi slično kao u zadatku **a)**.

c) Možemo poći od relacije $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$. **d)** $\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}2\alpha}$.

227. **a)** $\sin 4\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg} 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}$, $\cos 4\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}$, $\operatorname{tg} 4\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg} 2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}$

b) $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\operatorname{tg} x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

228. Ako u prvoj jednačini uzmemo $\cos 2t = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t}$ i $\sin 2t = \dfrac{2\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg}^2 t}$ pa zamijenimo $\operatorname{tg} t = \dfrac{a}{b}$ koji dobijemo iz druge jednačine, dobićemo $(a-b)\dfrac{1-\frac{a^2}{b^2}}{1-\frac{a^2}{b^2}} + a \cdot \dfrac{2\frac{a}{b}}{1+\frac{a^2}{b^2}} = a+b$. Odavde slijedi rezultat eliminacije, i to: $a^3+b^3 = a^2 b$.

229. **a)** $1+\cos 2\alpha = 1+\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha$

b) Lijevu stranu dovodimo na oblik $1-(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 2\sin^2\alpha$.

c) i **d)** slijede iz relacija **a)** i **b)**.

230. **a)** $2\cos^2\frac{\alpha}{2}$, $2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$

b) $2\cos^2 2x$, $2\sin^2 2x$ itd.

231. **a)** $2\cos^2 x = 1+(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1+\cos 2x$

b) $2\sin^2 x = 1-(\cos^2 x - \sin^2 x)$ itd. **c)** $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{2\sin^2 2x}{2\cos^2 2x}$ itd.

232. **a)** $2\cos^2\dfrac{x}{2} = 1+\cos x$ **b)** $1-\cos x$ **c)** $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$.

233. **a)** Lijevu stranu možemo dovesti na oblik $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} + \dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} =$

$$= 2\cdot\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = 2\cdot\frac{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} = \frac{2}{\cos 2\alpha}.$$

234. $\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. Podijeli brojilac i imenilac sa $\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

235. **a)** Izrazi $\operatorname{ctg}2\alpha$ pomoću $\operatorname{ctg}\alpha$, dovedi na zajednički imenilac i uzmi $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. **b)** Izrazi $\operatorname{tg}2\alpha$ pomoću $\operatorname{tg}\alpha$ a zatim zamijeni $\operatorname{tg}\alpha$ izrazom $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

236. **a)** $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$

b) Uzmi $1+\sin\alpha=\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$ i $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$, skrati razlomak i, na kraju, podijeli brojilac i imenilac sa $\cos\frac{\alpha}{2}$.

237. Izrazi funkcije tangens i kotangens pomoću funkcija sinus i kosinus i sredi dobiveni izraz, pa izlazi: $\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin x\cos x}=$
$=\dfrac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\dfrac{2-\sin^2 2x}{\sin 2x}$.

238. **a)** Možemo uzeti $\operatorname{tg}(30°+\alpha)=\operatorname{tg}[90°-(60°-\alpha)]=\operatorname{ctg}(60°-\alpha)$. Time zadani izraz prelazi u oblik $\operatorname{ctg}(60°-\alpha)-\dfrac{1}{\operatorname{ctg}(60°-\alpha)}=$
$=2\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2(60°-\alpha)-1}{2\operatorname{ctg}(60°-\alpha)}=2\operatorname{ctg}(120°-2\alpha)$. **b)** Lijevu stranu dovodimo na oblik $\operatorname{ctg}(30°-\alpha)+\operatorname{tg}(30°-\alpha)$. Ako izrazimo kotangens i tangens pomoću funkcija sinus i kosinus i dovedemo na zajednički imenilac, izlazi: $\dfrac{1}{\sin(30°-\alpha)\cos(30°-\alpha)}=\dfrac{2}{\sin 2(30°-\alpha)}$.

239. Izraz možemo dovesti na oblik $3-4\sin^2\alpha=\dfrac{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{\sin\alpha}$, a to je upravo $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$.

240. Izraz se dovede na oblik $(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos 45^\circ\cos\alpha+\sin 45^\circ\sin\alpha)=$ $=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha.$

241. **a)** Uzmi $\operatorname{ctg} 2t=\frac{\operatorname{ctg}^2 t-1}{2\operatorname{ctg} t}$ i zatim $\operatorname{ctg} t=\frac{1}{\operatorname{tg} t}$. **b)** Koristi se identičnošću **a)**; tada je $2\operatorname{ctg} 2t-4\operatorname{ctg} 4t=2\operatorname{tg} 2t$. Saberi ovu relaciju sa relacijom **a)**. **c)** Uzmi relaciju **a)** u obliku $4\operatorname{ctg} 4t-$ $-8\operatorname{ctg} 8t=4\operatorname{tg} 4t$ pa je oduzmi od identičnosti **b)**.

242. Prema adicionoj teoremi, a zbog $\operatorname{tg}\beta=\frac{3}{2}\operatorname{tg}\alpha$, lijeva strana se dovede na oblik $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2+3\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{4\cos^2\alpha+6\sin^2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{4+2\sin^2\alpha}=$ $=\frac{\sin 2\alpha}{4+\sin^2\alpha+1-\cos^2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{5-\cos 2\alpha}$.

243. **a)** $\cos\alpha$ **b)** $\sin\alpha$ **c)** 1

244. **a)** $\cos^2\alpha$ **b)** $\sin^2\alpha$ **c)** 1 **d)** 1.

245. **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{2}$. **246.** **a)** $\cos\alpha$ **b)** $\mp\sin\alpha$.

247. **a)** $\frac{\cos\alpha}{2}$ **b)** $\frac{\sin\alpha}{2}$.

248. **a)** Za gornji znak dobiće se $\operatorname{tg}\alpha$ a za donji $\operatorname{ctg}\alpha$.
b) $2\operatorname{tg}\alpha$ **c)** $-2\operatorname{ctg}\alpha$.

249. **a)** $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{1}{4}$. **250.** **a)** $\cos^2\alpha$ **b)** $\sin^2\alpha$.

251. **a)** 2 **b)** $2\operatorname{tg}\alpha$. **252.** **a)** $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ **b)** $\frac{1}{\sin^2\alpha}$.

253. **a)** $\operatorname{tg}\alpha$ **b)** $-\operatorname{tg}\alpha$. **254.** **a)** 1 **b)** 1.

255. **a)** $\operatorname{tg}^2\alpha$ **b)** $\operatorname{tg}^4\alpha$ **c)** $-\operatorname{tg}^2\alpha$. **256.** **a)** i **b)** 1.

257. **a)** $4\sin^2\alpha$ **b)** $4\cos^2\alpha$ **c)** $2\sin^2\alpha$.

258. **a)** $\pm\operatorname{tg}\alpha$ **b)** $\operatorname{tg}\alpha$ **c)** $\operatorname{tg}\alpha$

259. **a)** i **b)** 1 **c)** -1. **260.** **a)** $\cos^4\alpha$ **b)** $\sin^4\alpha$.

261. **a)** $\operatorname{tg}^3\alpha$ **b)** $-\operatorname{ctg}\alpha$ **c)** $\operatorname{tg}\alpha$.

262. **a)** $\sin 2\alpha$ **b)** $-\sin 2\alpha$ **c)** $2\sin 2\alpha$.

263. **a)** $\cos 2\alpha$ **b)** $\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$.

264. **a)** $\frac{2}{\sin 2\alpha}$ **b)** $2\operatorname{ctg} 2\alpha$ **c)** $-4\operatorname{ctg}^2 2\alpha$.

265. **a)** $\frac{2\cos\alpha}{\cos 2\alpha}$ i $-\frac{2\sin\alpha}{\cos 2\alpha}$ **b)** i **c)** $\operatorname{tg} 2\alpha$.

266. $\frac{2}{\cos 2\alpha}$ i $2\operatorname{tg} 2\alpha$. **267.** **a)** $\operatorname{tg} 2\alpha$ **b)** $-\operatorname{tg} 2\alpha$.

268. **a)** $\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$ i $-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\cos 2\alpha$ **b)** $\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$.

269. $\sin 2\alpha$. **270.** $\pm\frac{1}{2}\sin 2\alpha$.

271. Izraz dovodimo na oblik $\frac{\sin^6\alpha(1-\sin^2\alpha)\pm\cos^6\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\sin^4\alpha(1-\sin^2\alpha)\pm\cos^4\alpha(1-\cos^2\alpha)} =$
$= \frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^4\alpha\pm\cos^4\alpha)}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha\pm\cos^2\alpha)}$. Rezultati: $1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$ i 1.

272. **a)** $2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ i $2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ **b)** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ i $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

273. **a)** $4\cos^2\frac{\alpha}{2}$ i $4\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$ **b)** $4\sin^2\frac{\alpha}{2}$ i $-4\cos\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

274. **a)** $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$ i $-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$ **b)** $4\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ i $4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

275. **a)** $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ i $-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ **b)** $4\sin^2\frac{\alpha}{2}$ i $4\cos^2\frac{\alpha}{2}$ **c)** $2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ i $2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

276. a) $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$ b) $\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$. **277.** a) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ b) $-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

278. a) $\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$ b) $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

279. a) $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$ b) $-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$, $-\operatorname{tg}\alpha$.

280. a) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ b) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$ c) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$.

281. a) $2(1+\sin\alpha)$ i $2\sin\alpha(1+\sin\alpha)$

b) $2(1-\sin\alpha)$ i $2\sin\alpha(\sin\alpha-1)$.

282. a) $\frac{1\pm\sin\alpha}{\cos\alpha}$ b) $\frac{\sin\alpha\mp1}{\sin\alpha\pm1}$ c) $\frac{\sin\alpha\pm1}{\cos\alpha}$.

283. a) $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$ i $\frac{\sin\alpha-1}{\sin\alpha+1}$ b) $\frac{\sin\alpha+1}{\sin\alpha-1}$ c) $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$.

284. Iz $2\gamma=180°-(2\alpha+2\beta)$ izlazi $\sin 2\gamma=\sin(2\alpha+2\beta)$; nadalje je $\cos\gamma=\cos[90°-(\alpha+\beta)]=\sin(\alpha+\beta)$. Ako zamijenimo $\sin 2\gamma$ u brojiocu i $\cos\gamma$ u imeniocu, izlazi:
$\frac{\sin 2\alpha(1+\cos 2\beta)+\sin 2\beta(1+\cos 2\alpha)}{\cos\alpha\cos\beta\sin(\alpha+\beta)}$. Uzmemo li $1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$ i analogno $1+\cos 2\beta$ dobićemo, na kraju, 4.

285. Svakako je $1=\frac{\sin\frac{360°}{7}}{\sin\frac{180°}{7}}\frac{\sin\frac{720°}{7}}{\sin\frac{360°}{7}}\frac{\sin\frac{180°}{7}}{\sin\frac{720°}{7}}=$

$$=\frac{2\sin\frac{180°}{7}\cos\frac{180°}{7}}{\sin\frac{180°}{7}}\frac{2\sin\frac{360°}{7}\cos\frac{360°}{7}}{\sin\frac{360°}{7}}\frac{-\sin\left(180°+\frac{180°}{7}\right)}{\sin\frac{720°}{7}}=$$

$$=4\cos\frac{180°}{7}\cos\frac{360°}{7}\frac{-2\sin\frac{720°}{7}\cos\frac{720°}{7}}{\sin\frac{720°}{2}}=$$

$=-8\cos\frac{180°}{7}\cos\frac{360°}{7}\cos\frac{720°}{7}$ odakle neposredno slijedi tvrdnja.

286. Imamo: $\dfrac{\cos^4\alpha+\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}+\sin\alpha\cos\alpha\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=$

$=\dfrac{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$ itd.

287. Uzmi $\sin 2x=2\sin x\cos x$ i $\cos 2x=2\cos^2 x-1$. Rezultat: $\pm\sqrt{3}$.

288. **a)** Uzmi $\sin\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ itd. Izlazi 4: **b)** $\dfrac{4}{225}$.

6. Trigonometrijske funkcije poluuglova (polukutova)

289. **a)** $\cos x = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$ **b)** $\pm\sqrt{\frac{1+\cos 4x}{2}}$

c) $\pm\sqrt{\frac{1+\cos\frac{a}{2}}{2}}$ **d)** $\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2(a+b)}{2}}$.

290. **a)** $\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$ **b)** $\pm\sqrt{\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{2}}$ **c)** $\pm\sqrt{\frac{1-\cos 4}{2}}$

d) $\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2(\alpha-\beta)}{2}}$.

291. **a)** $\operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$ **b)** $\pm\sqrt{\frac{1-\cos 4\alpha}{1+\cos 4\alpha}}$,

c) $\pm\sqrt{\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{1+\cos\frac{x}{2}}}$ **d)** $\pm\sqrt{\frac{1-\cos(a+b)}{1+\cos(a+b)}}$.

292. **a)** $\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$, $\operatorname{tg} 15^\circ = 2-\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 15^\circ = 2+\sqrt{3}$.

293. $\sin 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\cos 22^\circ 30' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$,

$\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \sqrt{2}-1$, $\operatorname{ctg} 22^\circ 30' = \sqrt{2}+1$.

294. Kako je $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, to je:

a) $\sin\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$ **b)** $\cos\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$.

295. Kako je $\cos\alpha=\frac{7}{25}$, to je: **a)** $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{3}{5}$ **b)** $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{4}{5}$.

296. **a)** $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{5}{6}$ **b)** $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{11}}{6}$ **c)** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{11}}{5}$

d) $\cos\frac{\alpha}{4}=\frac{\sqrt{33}}{6}$.

297. **a)** $+,+$ **b)** $-,+$ **c)** $-,-$ **d)** $+,-$.

298. **a)** $\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=-\frac{5}{13}$ **b)** $\sin\frac{\alpha}{4}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$

c) $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ **d)** $\frac{3}{2}$.

299. Kako je ugao α u III kvadrantu, to je $\cos\alpha=-\frac{7}{25}$ pa je:

a) $\sin\frac{\alpha}{2}=+\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\frac{4}{5}$ **b)** $\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}}=-\frac{3}{5}$

c) $\sin\frac{\alpha}{4}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **d)** $\cos\frac{\alpha}{4}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

300. $\cos 750^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ pa je: **a)** $\sin 375^\circ=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

b) $\cos 375^\circ=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ **c)** $\operatorname{tg} 375^\circ=2-\sqrt{3}$.

301. **a)** $\cos 420^\circ=\frac{1}{2}$ **b)** $\cos 210^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos 105^\circ=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

302. Ako je $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, onda je: **a)** $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\frac{7}{25}$

b) $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}=\frac{3}{5}$.

303. $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ pa je: **a)** $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{120}{169}$

b) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=-\frac{119}{169}$ pa je $\sin\alpha=\frac{12}{13}$.

304. a) Ako je $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, onda je $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{24}{7}$. - 2 tg alfa -

b) Iz obrasca $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ izlazi jednačina $\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha-2\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}2\alpha=0$ odakle je $\operatorname{tg}\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}}{\operatorname{tg}2\alpha}$. U obzir dolazi znak „+“ ispred korijena jer je α ugao I kvadranta, pa je tangens pozitivan; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{-1+\sqrt{1+\frac{576}{59}}}{\frac{24}{7}}=\frac{3}{4}$.

305. $\operatorname{tg}2\alpha=-\frac{24}{7}$. U obrascu $\operatorname{tg}\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}}{\operatorname{tg}2\alpha}$ treba da uzmemo znak „−“ ispred korijena, jer $\operatorname{tg}\alpha$ treba da bude pozitivan; dakle $\operatorname{tg}\alpha=\frac{-1-\sqrt{1+\frac{576}{49}}}{-\frac{24}{7}}=\frac{4}{3}$.

306. $\operatorname{tg}2\alpha=-\frac{120}{119}$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{-1+\sqrt{1+\frac{14400}{14161}}}{-\frac{120}{119}}=-\frac{5}{12}$.

302. Ako je $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, onda je: **a)** $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\frac{7}{25}$

b) $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}=\frac{3}{5}$.

303. $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ pa je: **a)** $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{120}{169}$

b) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=-\frac{119}{169}$ pa je $\sin\alpha=\frac{12}{13}$.

304. **a)** Ako je $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, onda je $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{24}{7}$.

b) Iz obrasca $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ izlazi jednačina $\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}2\alpha=0$ odakle je $\operatorname{tg}\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}}{\operatorname{tg}2\alpha}$. U obzir dolazi znak „+“ ispred korijena jer je α ugao I kvadranta, pa je tangens pozitivan; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{-1+\sqrt{1+\frac{576}{59}}}{\frac{24}{7}}=\frac{3}{4}$.

305. $\operatorname{tg}2\alpha=-\frac{24}{7}$. U obrascu $\operatorname{tg}\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}}{\operatorname{tg}2\alpha}$ treba da uzmemo znak „−“ ispred korijena, jer $\operatorname{tg}\alpha$ treba da bude pozitivan; dakle $\operatorname{tg}\alpha=\frac{-1-\sqrt{1+\frac{576}{49}}}{-\frac{24}{7}}=\frac{4}{3}$.

306. $\operatorname{tg}2\alpha=-\frac{120}{119}$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{-1+\sqrt{1+\frac{14400}{14161}}}{-\frac{120}{119}}=-\frac{5}{12}$.

7. Transformacija proizvoda (umnoška, produkta) trigonometrijskih funkcija u zbir (sumu) ili razliku (diferenciju)

307. **a)** $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$ **b)** $\cos\alpha\sin\beta=$

$=\frac{1}{2}[\sin(\beta+\alpha)+\sin(\beta-\alpha)]$ **c)** $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+$

$+\cos(\alpha-\beta)]$ **d)** $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$.

308. **a)** $\frac{1}{2}\left[\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right]$ **b)** $\frac{1}{2}\left[\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right]$

c) $\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\operatorname{coc}\frac{\alpha-\beta}{2}\right]$ **d)** $\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$.

309. **a)** $\frac{1}{2}[\sin(\alpha+2\beta)+\sin\alpha]$ **b)** $\frac{1}{2}[\sin(\alpha+2\beta)-\sin\alpha]$

c) $\frac{1}{2}[\cos(\alpha+2\beta)+\cos\alpha]$ **d)** $\frac{1}{2}[\cos\alpha-\cos(\alpha+2\beta)]$.

310. **a)** $\frac{1}{2}[\sin\alpha+\sin(\alpha-2\beta)]$ **b)** $\frac{1}{2}[\sin\alpha+\sin(2\beta-\alpha)]$

c) $\frac{1}{2}[\cos\alpha+\cos(\alpha-2\beta)]$ **d)** $\frac{1}{2}[\cos(\alpha-2\beta)-\cos\alpha]$.

311. **a)** $\frac{1}{2}[\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta]$ **b)** $\frac{1}{2}[\sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta]$

c) $\frac{1}{2}[\cos(2\alpha+\beta)+\cos\beta]$ **d)** $\frac{1}{2}[\cos\beta-\cos(2\alpha+\beta)]$.

312. **a)** $\frac{1}{2}[\sin(2\alpha - \beta) + \sin\beta)]$ **b)** $\frac{1}{2}[\sin(2\alpha - \beta) - \sin\beta]$

c) $\frac{1}{2}[\cos(2\alpha - \beta) + \cos\beta]$ **d)** $\frac{1}{2}[\cos\beta - \cos(2\alpha - \beta)]$.

313. **a)** $\frac{1}{2}[\sin\beta + \sin(2\alpha - \beta)]$ **b)** $\frac{1}{2}[\sin\beta + \sin(\beta - 2\alpha)]$

c) $\frac{1}{2}[\cos\beta + \cos(2\alpha - \beta)]$ **d)** $\frac{1}{2}[\cos(2\alpha - \beta) - \cos\beta]$.

314. **a)** $\frac{1}{2}[\sin(3\alpha + \beta) + \sin(\beta - \alpha)]$ **b)** $\frac{1}{2}[\sin(3\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$.

315. **a)** $\frac{1}{2}[\sin(3\alpha + \beta) + \sin(3\beta - \alpha)]$ **b)** $\frac{1}{2}[\cos(3\beta - \alpha) - \cos(3\alpha + \beta)]$.

316. **a)** $\frac{1}{2}[\sin(3\alpha - \beta) + \sin(\alpha + 3\beta)]$ **b)** $\frac{1}{2}[\cos(3\alpha - \beta) + \cos(\alpha + 3\beta)]$.

317. **a)** $\frac{1}{2}[\sin 3(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta)]$ **b)** $\frac{1}{2}[\sin 3(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$.

318. **a)** $\frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta + \gamma - \delta) + \sin(\alpha + \beta - \gamma + \delta)]$ **b)** $\frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta + \gamma - \delta) - \sin(\alpha + \beta - \gamma + \delta)]$ **c)** $\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta - \gamma + \delta) - \cos(\alpha + \beta + \gamma - \delta)]$.

319. **a)** $\frac{1}{2}[\sin(\gamma - \beta) + \sin(2\alpha - \beta - \gamma)]$ **b)** $\frac{1}{2}[\cos(\gamma - \beta) + \cos(2\alpha - \beta - \gamma)]$ **c)** $\frac{1}{2}[\cos(2\alpha - \beta - \gamma) - \cos(\gamma - \beta)]$.

8. Transformacija trigonometrijskih izraza za logaritmovanje

320. a) $2\sin\frac{65°+25°}{2}\cos\frac{65°-25°}{2}=\sqrt{2}\cos 20°$ b) $\sqrt{2}\sin 20°$

c) $2\cos 50°\cos 20°$ d) $2\sin 62°\sin 20°$ e) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ f) $-\sqrt{2}\sin\alpha$

321. a) Spajaj članove ovim redom: $(\sin 10°+\sin 50°)+(\sin 20°+$
$+\sin 40°)=2\sin 30°\cos 20°+2\sin 30°\cos 10°=$
$=2\sin 30°\cos 20°+2\sin 30°\cos 10°=2\cos 15°\cos 5°$
b) $2\sqrt{2}\cos 27°\,30'\cos 2°\,30'$.

322. a) $2\cos\frac{3\alpha+\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha-\alpha}{2}$ itd.

323. a) $1-\sin 2\alpha=\sin 90°-\sin 2\alpha=2\cos\frac{90°+2\alpha}{2}\sin\frac{90°-2\alpha}{2}=$
$=2\cos(45°+\alpha)\sin(45°-\alpha)$. Ako uzmemo u obzir da je $\cos(45°+$
$+\alpha)=\sin(45°-\alpha)$, onda izlazi tražena relacija.

324. a) $2\sin\frac{\alpha+\alpha+2\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\alpha-2\beta}{2}=2\sin(\alpha+\beta)\cos(-\beta)=$
$=2\sin(\alpha+\beta)\cos\beta$.

326. a) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\cos 2\alpha}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=$

$=\frac{\cos\alpha+\cos(90°-\alpha)}{\cos\alpha-\cos(90°-\alpha)}$ itd.

Uzmi, na kraju, u obzir da je $-\operatorname{ctg}(\alpha-45°)=\operatorname{ctg}(45°-\alpha)$.

b) Lijevu stranu možeš pisati u obliku $\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ itd.

327. **a)** Lijevu stranu dovedi na oblik $\dfrac{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$ itd.

328. **a)** Lijevu stranu piši u obliku

$$2\sin\frac{30°+\alpha+30°-\alpha}{2}\cos\frac{30°+\alpha-30°+\alpha}{2} \text{ itd.}$$

329. **a)** Imamo $2\cos\dfrac{60°+\alpha+60°-\alpha}{2}\sin\dfrac{60°+\alpha-60°+\alpha}{2}$ itd.

330. **a)** Lijevu stranu uzmi u obliku

$$2\sin\frac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2} \text{ itd.}$$

331. **b)** Imamo $\dfrac{(\sin\alpha-\sin\beta)(\sin\alpha+\sin\beta)}{(\cos\beta-\cos\alpha)(\cos\beta+\cos\alpha)}$ itd.

332. **a)** Imamo $\cos 60°+\cos\alpha$ itd. **b)** $\cos 60°-\cos\alpha=$

$$=-2\sin\frac{60°+\alpha}{2}\sin\frac{60°-\alpha}{2}=2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+30°\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-30°\right).$$

333. **a)** $1+\sin\alpha=\sin 90°+\sin\alpha$ itd. **b)** $\sin 90°-\sin\alpha$ itd.

c) Piši $\operatorname{tg}\alpha\,(1+\cos\alpha)=\operatorname{tg}\alpha\cdot 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$ itd.

334. **a)** Lijevu stranu pišemo $\operatorname{ctg}\alpha\,(1+\sin\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha\,(\sin 90°+\sin\alpha)$ itd.
Uzmi na kraju $\sin\left(45°+\dfrac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(45°-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

b) Izraz se dovodi na oblik $\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}$ itd.

335. Lijevu stranu pišemo u obliku $\sqrt{\dfrac{\sin 90°-\sin\alpha}{\sin 90°+\sin\alpha}}=$

$$=\sqrt{\operatorname{ctg}\left(45°+\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$ Uzmi $\operatorname{ctg}\left(45°+\dfrac{\alpha}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(45°-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

336. **a)** $\cos\alpha+\sin\alpha=\cos\alpha+\cos(90°-\alpha)$ itd.

337. a) $(1+\cos\alpha)+\sin\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\right.$

$\left.+\cos\frac{\alpha}{2}\right)=2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\left(90°-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$ itd.

338. Imamo: $(\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha)(\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha)=$

$=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}\cdot\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$ itd.

339. a) Uzmi $\operatorname{tg}(30°-\alpha)=\operatorname{ctg}[90°-(30°-\alpha)]=\operatorname{ctg}(60°+\alpha)$.

Time lijeva strana prelazi u oblik $\operatorname{tg}(60°+\alpha)-\operatorname{ctg}(60°+\alpha)=$

$=\frac{\sin(60°+\alpha)}{\cos(60°+\alpha)}-\frac{\cos(60°+\alpha)}{\sin(60°+\alpha)}=-2\operatorname{ctg}(120°+2\alpha)=2\operatorname{ctg}(60°-2\alpha)$.

340. a) Izraze u zagradama dovedi na oblik monoma zatim kvadriraj i izluči zajednički činilac (faktor).

341. $1+\cos\alpha+\cos2\alpha=2\cos^2\alpha+\cos\alpha=2\cos\alpha\left(\cos\alpha+\frac{1}{2}\right)=$

$=2\cos\alpha(\cos\alpha+\cos60°)=2\cos\alpha\cdot2\cos\frac{\alpha+60°}{2}\cos\frac{\alpha-60°}{2}$ itd.

342. $\frac{(1-\cos\alpha)+\sin\alpha}{(1+\cos\alpha)+\sin\alpha}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$ itd.

343. Lijevu stranu pišemo u obliku $\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=$

$=\frac{\sin\left(90°-\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$ itd.

344. a) $\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2}$ b) Za gornji znak

imamo $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$ a za donji $\operatorname{ctg}\frac{\beta-\alpha}{2}$. **c)** $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$ i $-\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}$

d) $\operatorname{ctg}\frac{\beta+\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta-\alpha}{2}$.

345. **a)** $\dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$ i $\dfrac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$ **b)** $\dfrac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$ i $\dfrac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$

c) $\dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$ i $\dfrac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$ **d)** $\dfrac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta+\alpha}{2}}$ i $-\dfrac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

346. **a)** $\dfrac{\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha\pm\beta}{2}}$ **b)** $\dfrac{\sin\frac{\beta\mp\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta\pm\alpha}{2}}$ **c)** $\dfrac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

347. **a)** $\dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$ **b)** $\dfrac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$ **c)** $\dfrac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$ **d)** $\dfrac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

348. **a)** $2\cos(\alpha+\beta)$ **b)** $2\cos(\alpha-\beta)$ **c)** $2\cos(\alpha+\beta)$

d) $2\cos(\alpha-\beta)$ **e)** $-2\sin(\alpha+\beta)$ **f)** $2\sin(\alpha-\beta)$.

349. **a)** Za gornji znak imamo $\dfrac{(\sin\alpha+\sin 2\alpha)+\sin 3\alpha}{(1+\cos 3\alpha)+(\cos\alpha+\cos 2\alpha)} =$

$= \dfrac{2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{3\alpha}{2}+2\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$ itd. Dobićemo $\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{2}$; za donji znak izlazi $\operatorname{ctg}\frac{3\alpha}{2}$. **b)** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ i $-\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{2}$ **c)** $-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ i $\operatorname{ctg}\frac{3\alpha}{2}$.

350. **a)** Uzmi $\dfrac{(\sin\alpha+\sin\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{[1+\cos(\alpha+\beta)]+(\cos\alpha+\cos\beta)}$ itd. Rezultat: $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$ a za donji znak izlazi $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **b)** $\pm\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ **c)** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ i $-\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$

d) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ i $-\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$.

351. a) Spoji zajedno $\sin\alpha+\sin 3\alpha$. Dobiveni razlomak skrati i dobićeš $\frac{2\cos\alpha+1}{2\cos\alpha-1}$ a odavde $\operatorname{ctg}\frac{60°+\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{60°-\alpha}{2}$. b) $\operatorname{tg} 2\alpha$.

352. a) $\frac{2\sin 2\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha}$ itd. Rezultat: $\operatorname{tg} 2\alpha$. b) $-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

353. a) $-\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$ b) $-\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}$.

354. Uzmi $\frac{(\sin\alpha+\sin 4\alpha)+(\sin 2\alpha+\sin 3\alpha)}{(\cos\alpha+\cos 4\alpha)+(\cos 2\alpha+\cos 3\alpha)}$ itd. Rezultat: $\operatorname{tg}\frac{5\alpha}{2}$ i $-\operatorname{tg}\alpha$.

355. Uzmi $\frac{(\sin\alpha-\sin 4\alpha)+(\sin 2\alpha-\sin 3\alpha)}{(\cos\alpha-\cos 4\alpha)+(\cos 2\alpha-\cos 3\alpha)}$ itd. Rezultat: $-\operatorname{ctg}\frac{5\alpha}{2}$.

356. Za gornji znak slijedi $-\operatorname{tg}\alpha$ a za donji $-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

357. a) $\sqrt{2}\cos\alpha\sin(45°-\alpha)$ i za donji znak $\sqrt{2}\cos\alpha\cos(\alpha-45°)$.

358. a) $\sqrt{1+\sin 2\alpha}=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=|\sin\alpha+\cos\alpha|=|\sin\alpha+\sin(90°-\alpha)|=|\sqrt{2}\cos(\alpha-45°)|$ b) $|\sqrt{2}\sin(\alpha-45°)|$.

359. a) $\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}(45°-\alpha)$ b) $\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}(\alpha-45°)$.

360. a) Uzmi $\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$ itd. Dobićeš $\operatorname{tg}\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$.

b) $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}-45°\right)$ c) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}-45°\right)$ d) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$.

361. Izraz se dovede na oblik $\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}=\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$.

362. a) Uzmi $\frac{\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos\alpha+\frac{1}{2}}=\frac{\sin\alpha+\sin 60°}{\cos\alpha+\cos 60°}=\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+30°\right)$.

b) $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}-15°\right)$.

363. Primijeni adicionu teoremu; dobićeš $2\operatorname{tg} 2\alpha$.

364. **a)** Imamo: $\cos^2 2\alpha - \sin^2 \alpha = \frac{1+\cos 4\alpha}{2} - \frac{1-\cos 2\alpha}{2} =$

$= \frac{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}{2} = \cos 3\alpha \cos \alpha$. **b)** Prelazimo na oblik $\cos^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha-\beta)$, pa postupi kao i u prethodnom zadatku. Izlazi: $\cos 2\alpha \cos 2\beta$.

365. **a)** $2\sqrt{2}\cos\alpha\cos(\alpha-45°)$ **b)** Kako je $1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$, izraz prelazi u oblik $2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right) = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\right.$

$\left.+\cos 60°\right) = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{4}+30°\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4}-30°\right)$.

c) Izraz dovedi na oblik $2\cos\alpha\left(\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ i zamijeni $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sa $\cos 45°$. Izlazi: $4\cos\alpha\sin\frac{45°+\alpha}{2}\sin\frac{45°-\alpha}{2}$ **d)** $4\sin 2\alpha\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\right.$

$\left.+15°\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-15°\right)$.

366. Imamo $(1+\cos\alpha)+(\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha)$. Izlazi: $(1+\cos\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha)$. Uzmi $1+\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}45°+\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin(45°+\alpha)}{\cos 45°\cos\alpha}$. Na kraju izlazi:

$$\frac{2\sqrt{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin(45°+\alpha)}{\cos\alpha}.$$

367. Imamo: $\frac{\cos\alpha-\sin\alpha+1}{\cos\alpha} = \frac{2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin(90°-\alpha)}$. Uzmi

$\sin(90°-\alpha) = 2\sin\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$. Izlazi: $\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

368. **a)** Uzmi $1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ i $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$. Izlazi:

$2\sqrt{2}\cos\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$. **b)** Izvrši transformaciju u brojiocu izraza $\cos\alpha+\sin\alpha$ a u imeniocu $\sin\alpha-\cos\alpha$ pa izlazi:

$$\frac{\sqrt{2}\,[1-\cos(\alpha-45^\circ)]}{2\sin(\alpha-45^\circ)} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha-45^\circ}{2}}{2\sin\frac{\alpha-45^\circ}{2}\cos\frac{\alpha-45^\circ}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha-45^\circ}{2}.$$

369. a) $\dfrac{4\cos^2(\alpha-45^\circ)}{\sin 2\alpha}$ b) $\dfrac{4\cos^2(45^\circ-2\alpha)}{\sin 4\alpha}$.

370. Brojilac dovedi na oblik $\dfrac{\cos 2\alpha\cos\alpha+\sin 2\alpha\sin\alpha}{\cos 2\alpha\cos\alpha}$ $=\dfrac{\cos(2\alpha-\alpha)}{\cos 2\alpha\cos\alpha}=\dfrac{1}{\cos 2\alpha}$, a imenilac prelazi u $\dfrac{1}{\sin 2\alpha}$. Rezultat: $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha$.

371. Imamo: $\operatorname{ctg}\alpha+\dfrac{\cos 2\alpha+1}{\sin 2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha+\dfrac{2\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=2\operatorname{ctg}\alpha$.

372. Zamijeni $2\sin\alpha-1$ sa $-\cos 2\alpha$. Tada izraz prima oblik $2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha-\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha\right)=2(\cos 30^\circ\sin 2\alpha-\sin 30^\circ\cos 2\alpha)=$ $=2\sin(2\alpha-30^\circ)$.

373. Posljednji član zamijeni sa $\cos^2 x$ odnosno sa $1-\sin^2 x$. Tada izraz prelazi u oblik $(1-\sin x)[(\operatorname{tg} x-1)+1+\sin x]=(1-\sin x)(\operatorname{tg} x+$ $+\sin x)=\operatorname{tg} x\,(1-\sin x)(1+\cos x)=4\operatorname{tg} x\cos^2\dfrac{x}{2}\sin^2\left(45^\circ-\dfrac{x}{2}\right)$.

374. Izraz prima oblik $\dfrac{(1+\cos 2\alpha)+(\cos\alpha+\cos 3\alpha)}{\cos\alpha+\cos 2\alpha}=$ $=\dfrac{2\cos^2\alpha+2\cos 2\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha}=2\cos\alpha$.

375. Imamo: $(1-\sin^2\beta)-\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\cos^4\alpha=\cos^2\beta-\cos^2\alpha(\sin^2\alpha+$ $+\cos^2\alpha)=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

376. Dovođenjem na zajednički imenilac dobićemo za brojilac izraz $\sin x\cos y\cos z+\cos x\sin y\cos z+\cos x\cos y\sin z-\sin[(x+y)+z]$. Posljednji član daje $-\sin(x+y)\cos z-\cos(x+y)\sin z$. Time brojilac prima oblik $\cos x\cos y\sin z-\cos(x+y)\sin z=\sin z[\cos x\cos y-$ $-\cos(x+y)]$ itd. Rezultat je $\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y\operatorname{tg} z$.

377. Imamo: $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ itd.

379. Zadanu relaciju piši u obliku $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{b}{-a}$ odnosno $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=$ $=\frac{b-a}{b+a}$. Odavde slijedi tražena relacija.

380. Lijevu stranu dovodimo na oblik $(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos^2\alpha-\cos\alpha\sin\alpha+$ $+\sin^2\alpha)+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\sin 45^\circ\cos(\alpha-45^\circ)(1-\sin\alpha\cos\alpha+$ $+\cos\alpha-\sin\alpha)=2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\alpha-45^\circ)(1+\cos\alpha)(1-\sin\alpha)=$ $=\sqrt{2}\cos(\alpha-45^\circ)\cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin(90^\circ-\sin\alpha)=$ $=4\sqrt{2}\cos(\alpha-45^\circ)\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

381. a) Izraz prelazi u oblik $(\sin\alpha+\sin\beta)+\sin[180^\circ-(\alpha+\beta)]=$ $=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\right.$ $\left.+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=2\sin\frac{180^\circ-\gamma}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

b) Imamo: $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=$ $=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=2\sin\frac{180^\circ-\gamma}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=$ $=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

382. a) Izraz prelazi u oblik $(\cos\alpha+\cos\beta)+\cos[180^\circ-(\alpha+\beta)]=$ $=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\left[2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-1\right]=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\right.$ $\left.-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+1=4\cos\frac{180^\circ-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+1$ itd.

b) $(\cos\alpha+\cos\beta)-\cos[180^\circ-(\alpha+\beta)]=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+$ $+2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-1=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-1$ itd.

383. **a)** Izraz prelazi u oblik $(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) + \sin 2[180^\circ - (\alpha+\beta)] = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - \sin 2(\alpha+\beta) = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = 2\sin(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] = 2\sin(\alpha+\beta)\cdot 2\sin\alpha\sin\beta = 4\sin(180^\circ-\gamma)\sin\alpha\sin\beta$ itd.

b) Imamo: $2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = 2\sin(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)] = 2\sin(\alpha+\beta)\cdot 2\cos\alpha\cos\beta$ itd.

384. **a)** Imamo: $(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) + \cos 2[180 - (\alpha+\beta)] = 2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \cos 2(\alpha+\beta) = 2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + 2\cos^2(\alpha+\beta) - 1 = 2\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)] - 1 = 4\cos(180^\circ-\gamma)\cos\alpha\cos\beta - 1 = -4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 1$.

b) $2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - 2\cos^2(\alpha+\beta) + 1 = 2\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] + 1$ itd.

385. Ako uzmemo $\alpha+\beta = 180^\circ - \gamma$, tada je $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -\operatorname{tg}\gamma$ ili $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = -\operatorname{tg}\gamma$; odavde izlazi tražena relacija.

386. Uzmi $\dfrac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}$, pa je $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \operatorname{tg}\left(90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}\right)$.

Budući da je $\operatorname{tg}\left(90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}\right) = \operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$, imamo $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$.

Odavde slijedi tražena relacija.

387. Imamo: $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}\right)$ i $\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} - 1}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}} = \operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}$ itd.

Relacija izlazi i neposredno iz relacije u zadatku 385 ako se zamijene uglovi sa polovinama odgovarajućih suplemenata.

388. Relacija neposredno slijedi iz 368. Kako?

389. **a)** Iz pretpostavke $\alpha+\beta=180°-\gamma$ slijedi $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\cos\gamma$ ili $\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma=\sin\alpha\sin\beta$. Kvadriranjem jednačine, pa iza toga zamjenom izraza $\cos^2\alpha$ sa $1-\sin^2\alpha$ i $\cos^2\beta$ i $\cos^2\gamma$ analognim izrazima, dolazimo do tražene relacije.

b) Kvadriraj jednačinu $\cos\alpha\cos\beta=\sin\alpha\sin\beta-\cos\gamma$ i uzmi $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ i analogno $\cos^2\beta$ i $\cos^2\gamma$. **c)** Pođi od $\cos(\alpha+\gamma)=-\cos\beta$.

390. **a)** $\cos(\alpha+\beta)=-\cos\gamma$, $\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma=\sin\alpha\sin\beta$, $\cos^2\alpha\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos^2\gamma=\sin^2\alpha\sin^2\beta$. Zamijeni $\sin^2\alpha$ sa $1-\cos^2\alpha$ i analogno $\sin^2\beta$ itd. **b)** $\cos\alpha\cos\beta=\sin\alpha\sin\beta-\cos\gamma$, kvadriraj jednačinu i zatim zamijeni $\sin^2\alpha$ sa $1-\cos^2\alpha$ i analogno $\sin^2\beta$. **c)** Pođi od relacije $\cos(\alpha+\gamma)=-\cos\beta$.

391. **a)** Polazeći od $\frac{\alpha+\beta}{2}=90°-\frac{\gamma}{2}$ slijedi $\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\sin\frac{\gamma}{2}$ i dalje $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}$. Kvadriraj jednačinu pa zatim zamijeni $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ sa $1-\sin^2\frac{\alpha}{2}$ i analogno $\cos^2\frac{\beta}{2}$ itd.

b) Pođi od relacije $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$ pa kvadriraj jednačinu itd. Kako slijede ove relacije iz 390. zadatka?

392. **a)** Imamo: $\frac{\alpha+\beta}{2}=90°-\frac{\gamma}{2}$, $\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\sin\frac{\gamma}{2}$. Odavde slijedi $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}$. Kvadriraj jednačinu i zamijeni $\sin^2\frac{\alpha}{2}$ sa $1-\cos^2\frac{\alpha}{2}$ i analogno $\sin^2\frac{\beta}{2}$ itd.

b) Pođi od jednakosti $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$ i postupi na sličan način kao i u prethodnim zadacima. **c)** Pođi od $\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}=\sin\frac{\beta}{2}$.

Ove relacije slijede iz 389. zadatka. Kako?

393. **a)** Ako je $\alpha+\beta+\gamma=180°$, onda je $2\alpha+2\beta=360°-2\gamma$ i $\cos(2\alpha+2\beta)=\cos2\gamma$ tj. $\cos2\alpha\cos2\beta=\sin2\alpha\sin2\beta+\cos2\gamma$ Kvadriraj jednačinu i zamijeni $\cos^2 2\alpha$ sa $1-\sin^2 2\alpha$ i analogno $\cos^2 2\beta$ itd. **b)** Pođi od relacije $\cos(2\alpha+2\gamma)=\cos2\beta$.

394. Kako je $2\alpha+2\beta=360°-2\gamma$, to je $\cos(2\alpha+2\beta)=\cos 2\gamma$ odnosno $\cos 2\alpha\cos 2\beta-\cos 2\gamma=\sin 2\alpha\sin 2\beta$. Kvadriraj i zamijeni $\sin^2 2\alpha$ sa $1-\cos^2 2\alpha$ i analogno $\sin^2 2\beta$.

395. $y=\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; $y_{\max}=\sqrt{2}$ za $x=\frac{3\pi}{4}$.

396. Polazeći od relacije iz zadatka 387. imamo $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=$

$$=\frac{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\left(\cos\frac{\beta+\gamma}{2}+\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=$$

$$=\frac{2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}+2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\ \text{itd.}$$

397. Uzmi u obzir da je $\sin\alpha\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\alpha\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

398. **a)** Imamo: $(\sin\alpha+\sin\beta)-(1-\sin\gamma)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-$

$$-2\sin^2\left(45°-\frac{\gamma}{2}\right)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left[\sin\left(90°-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right]=$$

$$=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{90°+\beta}{2}\sin\frac{90°-\alpha}{2}\ \text{itd.}$$

b) Pođi od $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\operatorname{ctg}(90°-\gamma)=\frac{1}{\operatorname{ctg}\gamma}$ **c)** Uzmi u obzir relaciju iz zadatka 184 **b)**.

399) **a)** Imamo: $q^2\left(\frac{p^2}{q^2}-\sin^2\alpha\right)$. Neka je $\frac{p}{q}=\sin\beta$; tada izlazi $q^2\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)$.

b) Imamo: $(p^2+q^2)\left(\frac{p^2}{p^2+q^2}\sin^2\alpha-\frac{q^2}{p^2+q^2}\cos^2\alpha\right)=$

$(p^2+q^2)\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$ gdje je $\sin\beta=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$, $\cos\beta=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$.

400. $-4\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha$.

9. Logaritmi trigonometrijskih funkcija

401. a) $\log \sin 12° 42' = 9.34\,212 - 10$ b) $9,77\,422 - 10$
c) $9,92\,810 - 10$ d) $9,97\,825 - 10$.

402. a) $\log \cos 19° 39' = 9,97\,349 - 10$ b) $9,59\,069 - 10$
c) $9,93\,427 - 10$ d) $9,38\,821 - 10$.

403. a) $\log \operatorname{tg} 28° 51' = 9.74\,107 - 10$ b) $9,95\,723 - 10$
c) $10,14\,113 - 10$ d) $10,43\,463 - 10$.

404. a) $\log \operatorname{ctg} 14° 10' = 10,59\,788 - 10$ b) $10,41\,582 - 10$
c) $9,90\,371 - 10$ d) $9,65\,197 - 10$.

405. a) $\log \sin 24° 11' 7'' = 9,61\,245 - 10$ b) $9,80\,525 - 10$
c) $9,90\,956 - 10$ d) $9,96\,752 - 10$.

406. a) $\log \cos 21° 17' 13'' = 9,96\,931 - 10$ b) $9,85\,821 - 10$
c) $9,77\,809 - 10$ d) $9,50\,816 - 10$.

407. a) $\log \operatorname{tg} 6° 15' 44'' = 9,04\,034 - 10$ b) $9,74\,055 - 10$
c) $10,08\,656 - 10$ d) $10,33\,856 - 10$.

408. a) $\log \operatorname{ctg} 24° 13' 51'' = 10,34\,672 - 10$ b) $9,35\,978 - 10$
c) $10,52\,600 - 10$ d) $9,91\,987 - 10$.

409. a) $\log \sin \alpha = 9,34\,268 - 10$, $\alpha = 12° 43'$ b) $56° 20'$
c) $67° 51' 22''$ d) $41° 48' 33''$.

410. a) $\log \cos \alpha = 9,93\,680 - 10$, $\alpha = 30° 10'$ b) $48° 10'$
c) $60° 20' 55''$ d) $83° 20' 59''$.

411. **a)** $\log \operatorname{tg} \alpha = 9{,}35\,757 - 10$, $\alpha = 12^\circ\,50'$ **b)** $70^\circ\,7'$
c) $30^\circ\,16'\,8''$ **d)** $73^\circ\,20'\,3''$.

412. **a)** $\log \operatorname{ctg} \alpha = 10{,}53\,306 - 10$, $\alpha = 16^\circ\,20'$ **b)** $55^\circ\,12'$
c) $41^\circ\,45'\,55''$ **d)** $62^\circ\,51'\,56''$.

413. **a)** $\log \sin \alpha = \log 12 - \log 19 = 1{,}07\,918 - 1{,}27\,875 = 9{,}80\,043 - 10$, $\alpha = 39^\circ\,10'$ **b)** $\alpha = 51^\circ\,19'\,04''$ **c)** $4^\circ\,45'\,50''$
d) $79^\circ\,02'\,45''$ **e)** $59^\circ\,02'\,10''$ **f)** $32^\circ\,44'\,06''$.

414. $\alpha = 9^\circ\,31'\,38''$.

415. **a)** $x = \sin 19^\circ\,48' \cdot \cos 64^\circ\,22'$, $\log x = \log \sin 19^\circ\,48' + \log \cos 64^\circ\,22'$ itd.; $x = 0{,}1465$ **b)** $y = 1{,}009$ **c)** $z = 0{,}610$ **d)** $v = 0{,}2967$
e) $a = 1{,}4546$ **f)** $b = 7{,}15$ **g)** $c = 0{,}37514$ **h)** $d = 0{,}57951$
i) $p = 0{,}97715$.

10. Trigonometrijske jednačine (jednadžbe) s jednom nepoznatom

Napomena: ako nije drugačije naznačeno onda k, koji se redovno javlja u rješenjima, ima značenje cijelog broja tj. $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

416. **a)** i **c)** $x = k\pi$ **b)** i **d)** $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

417. **a)** $x = 30° + k \cdot 360°$ i $x = 150° + k \cdot 360°$ **b)** $x = \pm 45° + k \cdot 360°$
c) $x = 60° + k \cdot 180°$ **d)** $x = 45° + k \cdot 180°$.

418. **a)** $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ **b)** $x = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$ **c)** $x = \frac{k\pi}{2}$
d) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$.

419. **a)** $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ i $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ **b)** $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$
c) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ **d)** $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

420. **a)** $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ za $x = 45°$ pa su rješenja zadane jednačine $x = 180° + 45° + k \cdot 360°$ i $x = -45° + k \cdot 360°$; drugo rješenje se može uzeti i u obliku $x = 360° - 45° + k \cdot 360°$. **b)** $x = 180° \pm 60° + k \cdot 360°$
c) $x = -30° + k \cdot 180°$ **d)** $x = -30° + k \cdot 180°$.

421. **a)** $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ i $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ **b)** $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$
c) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}$ **d)** $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$.

422. **a)** $x=\frac{\pi}{3}+4k\pi$ i $x=\frac{5\pi}{3}+4k\pi$ **b)** $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{4}{3}k\pi$ **c)** $x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ **d)** $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$.

423. **a)** $x+30^\circ=45^\circ+k\cdot 360^\circ$ i $x+30^\circ=135^\circ+k\cdot 360^\circ$ odakle je $x=15^\circ+k\cdot 360^\circ$ i $x=115^\circ+k\cdot 360^\circ$ **b)** $x-10^\circ=\pm 60^\circ+k\cdot 360^\circ$ tj. $x=70^\circ+k\cdot 360^\circ$ i $x=-50^\circ+k\cdot 360^\circ$ **c)** $x=12^\circ 30'+k\cdot 90^\circ$.

424. **a)** $\alpha=\beta+2k\pi$ i $\alpha=\pi-\beta+2k\pi=(2k+1)\pi-\beta$ **b)** $\alpha=\pm\beta+2k\pi$ **c)** $\alpha=\beta+k\pi$.

425. **a)** $x=20^\circ+k\cdot 360^\circ$, $x=160^\circ+k\cdot 360^\circ$ **b)** $x=-20^\circ+k\cdot 360^\circ$, $x=180^\circ-(-20^\circ)+k\cdot 360^\circ=200^\circ+k\cdot 360^\circ$ **c)** $x=55^\circ+k\cdot 360^\circ$, $x=165^\circ+k\cdot 360^\circ$ **d)** $x=15^\circ-k\cdot 360^\circ$, $x=58^\circ 20'+k\cdot 120^\circ$.

426. **a)** $\sin(x+20^\circ)=\sin(90^\circ-65^\circ)$, $x=5^\circ+k\cdot 360^\circ$, $x=135^\circ+k\cdot 360^\circ$ **b)** $x=40^\circ+k\cdot 360^\circ$, $x=120^\circ+k\cdot 360^\circ$ **c)** $2x-\frac{\pi}{8}=\pm x+2k\pi$ tj. $x=\frac{\pi}{8}+2k\pi$ i $x=\frac{\pi}{24}+\frac{2k\pi}{3}$.

427. **a)** Kad se jednačina uredi, dobiće se $\sin x=\frac{1}{2}$ odakle je $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ i $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$. **b)** $\cos x=\frac{1}{2}$ odakle je $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$. **c)** Jednačina se pomnoži sa zajedničkim imeniocem pa izlazi $\operatorname{tg} x=-5$, $x\approx -78^\circ 40'+k\cdot 180^\circ$.

428. **a)** Podijeli jednačinu sa $\cos x$; $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$. **b)** Dovedi jednačinu na oblik $\sin x\left(\frac{1}{\cos x}+1\right)=0$. Odavde je $\sin x=0$ za $x=k\pi$, a $\frac{1}{\cos x}+1=0$ za $x=(2k+1)\pi$. **c)** $x=k\pi$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$ **d)** $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$; $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$.

429. **a)** $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi$ **b)** $x=$

$=(2k+1)\pi,\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$ **c)** $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

odavde je $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ x=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ x=\frac{3\pi}{4}+$

$+2k\pi$.

d) $x=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$.

430. **a)** Zamijeni $\cos^2 x$ sa $1-\sin^2 x$. Rješenja su $x=k\pi,\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

b) $x=k\pi,\ x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ **c)** i **d)** $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$,

$x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\ x=\frac{7\pi}{4}+2k\pi$

e) U intervalu od 0 do 2π su rješenja $\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}$.

431. **a)** $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ **b)** Nalazimo

$\sin x=2$ i $\sin x=1$. Prva od tih jednačina nema rješenja, jer je najveća vrijednost koju može primiti funkcija sinus 1; drugu jednačinu zadovoljava $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$. **c)** i **d)** $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ x=$

$=(2k+1)\pi$.

432. **a)** Na lijevoj strani izluči $\operatorname{ctg} x$. Izlazi jednačina $\operatorname{ctg} x\,(1+\sin x)=$

$=1+\sin x$ ili $(1+\sin x)(\operatorname{ctg} x-1)=0$; odavde slijedi

$x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi$. **b)** $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi$.

433. **a)** Uzmi $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$. Rješenja su $x=45°+k\cdot 180°$ i $x\approx 54°\,30'+$

$+k\cdot 180°$. **b)** $x=45°+k\cdot 180°,\ x\approx 59°\,02'+k\cdot 180°$.

434. **a)** Rješavanjem kvadratne jednačine dobićeš $\cos 2x=-\frac{1}{2}$ i

$\cos 2x = -1$. Odavde nalazimo $2x = 180° \pm 60° + k \cdot 360°$ i $2x = (2k+1) \cdot 180°$ tj. $x = 90° \pm 30° + k \cdot 180°$ i $x = (2k+1)\,90°$.
b) $x \approx 35°\,50' + k \cdot 90°$, $x = -22°\,30' + k \cdot 90°$ **c)** Jednačinu $\sin 2x = 2$ odbacujemo, jer nema smisla; rješenje zadane jednačine je $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

435. **a)** Podijeli jednačinu sa $\cos^2 x$; izlazi: $\operatorname{tg} x = 1$ i $\operatorname{tg} x = 0{,}75$ tj. $x = 45° + k \cdot 180°$, $x \approx 36°\,50' + k \cdot 180°$ **b)** $x = 45° + k \cdot 180°$, $x \approx -56°\,20' + k \cdot 180°$ **c)** Zamijeni 6 sa $6\sin^2 x + 6\cos^2 x$. Rješenja su $x = 45° + k \cdot 180$, i $x \approx 18°\,30' + k \cdot 180°$.
d) $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

436. **a)** Zamijeni $\operatorname{tg}^2 x$ sa $\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$. Izlazi: $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ tj. $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ i $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ s tim da svakoj od ovih vrijednosti treba dodati $2k\pi$. **b)** $\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{4} - 2k\pi$, $x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$
c) Jednačinu dovedi na oblik $12\sin^4 x - 7\sin^2 x + 1 = 0$. Odavde je $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ i $\sin x = \pm\frac{1}{2}$ tj. $x \approx 35°\,16' + k \cdot 360°$, $x \approx 144°\,44' + k \cdot 360°$, $x \approx 215°\,16' + k \cdot 360°$ $x \approx 324°\,44' + k \cdot 360°$, $x = 30° + k \cdot 360°$, $x = 150° + k \cdot 360°$, $x = 210° + k\,360°$, $x = 330° + k \cdot 360°$.

437. **a)** Zamijeni $\sqrt{3}$ sa $\operatorname{ctg} 30°$ pa jednačina prelazi u $\sin x + \frac{\cos 30°}{\sin 30°}\cos x = 1$ ili $\sin x \sin 30° + \cos x \cos 30° = \sin 30°$ odnosno $\cos(x - 30°) = \frac{1}{2}$. Odavde je $x - 30° = k \cdot 360° \pm 60°$ tj. $x = (4k+1)\,90°$ i $x = (12k-1)\,30°$. Jednačina se može riješiti i tako da zamijenimo $\sin x$ sa $\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ i $\cos x$ sa $\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$. Time se

dolazi do jednačine $(1+\sqrt{3})\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1-\sqrt{3}=0$. Njezina su rješenja $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1$ i $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$. Iz prve od tih jednačina nalazimo $\frac{x}{2}=45°+k\cdot 180°$ ili $x=(4k+1)\,90°$. Ako se druga vrijednost od $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ uvrsti u formulu $\operatorname{tg}x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, dobiće se $\operatorname{tg}x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ odakle je $x=-30°$. Stoga su preostala rješenja zadane jednačine, a to su rješenja jednačine $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$, data sa $\frac{x}{2}=-15°+k\cdot 180°$ odakle je $x=(12k-1)\,30°$. Jednačina se može riješiti još na jedan način. Napišimo zadanu jednačinu u obliku $\sqrt{3}\cos x=1-\sin x$. Kvadrirajmo i zamijenimo dobiveni $\cos^2 x$ sa $1-\sin^2 x$. Dobićemo jednačinu $2\sin^2 x-\sin x-1=0$. Odavde nalazimo $\sin x=1$ i $\sin x=-\frac{1}{2}$. Prva od tih jednačina ima rješenje $x=(4k+1)\,90°$, a $\sin x=-\frac{1}{2}$ je zadovoljena za $x=-30°+k\cdot 360°$, ali i za $x=-150°+k\cdot 360°$. Ovo zadnje rješenje ne zadovoljava zadanu jednačinu nego jednačinu $\sin x-\sqrt{3}\cos x=1$. Da su se pri rješavanju zadane jednačine na ovaj način pojavila i rješenja koja samu jednačinu ne zadovoljavaju, možemo objasniti činjenicom što je jednačina koju smo dobili kvadriranjem tj. jednačina $2\sin^2 x-\sin x-1=0$ ekvivalentna skupu jednačina $\sin x\pm\sqrt{3}\cos x=1$.

b) Množenjem jednačine sa $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ona prelazi u oblik $\cos(x-45°)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, odakle je $x-45°=\pm 45°+k\cdot 360°$ tj. $x=4k\cdot 90°$ i $x=(4k+1)\,90°$. Mogli smo odlučiti da jednačinu riješimo tako da je kvadriramo. Time bismo dobili $\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1$ ili $\sin 2x=0$. Ova jednačina ima rješenje $x=n\cdot 90°$, gdje je n cio broj. Međutim, zadanu jednačinu ne zadovoljava svako $x=n\cdot 90°$ nego samo ako je n oblika $n=4k$ i $n=4k+1$; za cio broj n oblika $n=4k+2$ i $n=4k+3$ zadovoljena je jednačina $\sin x+\cos x=-1$, koja istim postupkom tj. kvadriranjem također prelazi u jednačinu $\sin 2x=0$. U ovom slučaju je jednačina koju dobivamo kvadriranjem zadane jednačine ekvivalentna dvjema jednačinama i to $\sin x+\cos x=\pm 1$.

c) Jednačinu dovedi na oblik $\sqrt{2}\cos(45°+x)=1$ odakle izlazi $x=$

$= k \cdot 360° \text{ i } x = k \cdot 360° - 90°$. **d)** Zamijeni $\sqrt{3}$ sa $\operatorname{tg} 60°$ pa izlazi $\cos(x - 60°) = \cos 45°$ odakle je $x - 60° = \pm 45° + k \cdot 360°$. Prema tome su rješenja $x = 105° + k \cdot 360°$ i $x = 15° + k \cdot 360°$.

438. **a)** Pomnoži jednačinu sa $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Izlazi: $\sin(2x - 45°) = \sin 45°$. Odavde nalazimo $2x - 45° = 45° + k \cdot 360°$ i $2x - 45° = 180° - 45° - k \cdot 360°$, prema tome su rješenja $x = (4k + 1)\,45°$ i $x = (2k + 1)\,90°$.

b) Množenjem sa $\frac{\sqrt{2}}{2}$ zadane jednačine imamo $\cos(3x - 45°) = \cos 0°$, odakle je $x = 15°(1 + 8k)$.

439. Ako je $a^2 + b^2 \neq 0$, uvijek postoji ugao φ i to $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ takav da je $\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Dijeljenjem zadane jednačine sa $\sqrt{a^2 + b^2}$ dobićemo $\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Kako je $|\sin(x + \varphi)| \leqslant 1$, zadana jednačina ima rješenje ako je $|c| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$ tj. $c^2 \leqslant a^2 + b^2$. Tada je $\cos(x + \varphi) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(x + \varphi)} = \pm\sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + b^2}}$. Uzmemo li u obzir da je

$$\sin x = \sin(x + \varphi - \varphi) = \sin(x + \varphi)\cos\varphi - \cos(x + \varphi)\sin\varphi,$$
$$\cos x = \cos(x + \varphi - \varphi) = \cos(x + \varphi)\cos\varphi + \sin(x + \varphi)\sin\varphi,$$

prema gornjem, za $\sin x$ i $\cos x$ nalazimo dva para rješenja, i to:

1. rješenje:
$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{bc - a\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2} \\ \cos x = \dfrac{ac + b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

2. rješenje:
$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{bc + a\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2} \\ \cos x = \dfrac{ac - b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2} \end{cases}.$$

Zadanu jednačinu zadovoljavaju one vrijednosti od x koje istovremeno zadovoljavaju $\sin x$ i $\cos x$ iz ovih parova jednačina.

440. **a)** Ako 1 zamijenimo sa $\sin^2 x + \cos^2 x$, tada jednačina prelazi u oblik $3\operatorname{ctg}^2 x - \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = 1$ ili $3\operatorname{ctg}^2 x - 1 - \operatorname{ctg}^2 x = 1$ i, na kraju, $\operatorname{ctg} x = \pm 1$; rješenja jednačine biće $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$. **b)** Jedna-

čina prelazi u oblik $\operatorname{tg} x = \pm 1$ čija su rješenja $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$.

441. a) Sređivanjem dobićemo jednačinu $8\cos^4 x - 10\cos^2 x + 3 = 0$. Njezina su rješenja $\cos^2 x = \frac{3}{4}$ i $\cos^2 x = \frac{1}{2}$; odavde je $\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Prema tome rješenja jednačine biće: $x = \pm 30° + k \cdot 360°$, $x = \pm 45° + k \cdot 360°$, $x = 180° \pm 30° + k \cdot 360°$, $x = 180° \pm 45° + k \cdot 360°$. b) Jednačina se može dovesti na oblik $\sin \frac{x}{2}\left(\frac{1}{\cos \frac{x}{2}} + 2\right) = 0$.

Rješenje jednačine $\sin \frac{x}{2} = 0$ za datu jednačinu nema smisla, jer na mjestima gdje $\sin \frac{x}{2}$ postaje 0 $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ postaje beskonačan. Ako se izraz u zagradi izjednači sa nulom, dolazimo do jednačine $\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$ odakle je $\frac{x}{2} = 180° \pm 60° + k \cdot 360°$, a sam $x = (2k+1)360° \pm 120°$.

442. a) Oslobodivši se razlomka i daljnjim sređivanjem, jednačina prelazi u oblik $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$ odakle dijeljenjem sa $\cos x$ slijedi jednačina $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ čija su rješenja $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. b) Jednačina se može dovesti na oblik $(\sin x - \cos x)(2\sin x + 2\cos x + 5) = 0$. Iz jednačine $\sin x - \cos x = 0$ dobivamo $\operatorname{tg} x = 1$ čija su rješenja $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Ako se izraz u drugoj zagradi izjednači sa nulom, dolazimo do jednačine $\sin x + \cos x = -\frac{5}{2}$; ovu jednačinu ne zadovoljava nijedna vrijednost od x, jer je $-\sqrt{2} \leqslant \sin x + \cos x \leqslant \sqrt{2}$. (Pazi: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos(45° - x)$!)

443. a) Za $x = k\pi$ jednačina nema smisla. Za $x \neq k\pi$ ona se može dovesti na oblik $\cos^3 x + \cos^2 x = \sin^3 x + \sin^2 x$ ili $(\cos x - \sin x)(\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x \cos x + \sin x + \cos x) = 0$. Iz jednačine $\cos x - \sin x = 0$ nalazimo $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. U jednačini $\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x \cos x + \sin x + \cos x = 0$ provedimo supstituciju: $\sin x + \cos x = t$; tada je $t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$ odakle je $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$. Time će jednačina

primiti oblik $1+\frac{t^2-1}{2}+t=0$ odakle je $t=-1$. Prema tome je $\sin x+\cos x=-1$ ili $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ tj. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Za svaki cijeli broj m i n ovu jednačinu zadovoljava $x=-\frac{\pi}{2}+2m\pi$ i $x=(2n+1)\pi$ s tim da $x=(2n+1)\pi$ nisu rješenja zadane jednačine, jer za $x=k\pi$ ona nema smisla. **b)** Lijeva strana jednačine prelazi u oblik $\frac{1+\cos x}{\sin x(1+\cos x)}$. Prema pretpostavci je $1+\cos x\neq 0$, pa se jednačina smije skratiti sa $1+\cos x$ te dobivamo $\sin x=\frac{1}{2}$. Rješenja su $x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6}$.

444. **a)** Kada zamijenimo $\operatorname{tg} x$ sa $\frac{\sin x}{\cos x}$ te se oslobodimo razlomaka i zamijenimo $\cos^2 x$ sa $1-\sin^2 x$, izlazi jednačina $2\sin^2 x-\sin x-1=0$. Odavde nalazimo $\sin x=1$ i $\sin x=-\frac{1}{2}$. Kada je $\sin x=1$ onda je $\cos x=0$. Kako za $\cos x=0$ zadana jednačina gubi smisao, rješenja jednačine $\sin x=1$ ne dolaze u obzir. Zadanu jednačinu zadovoljavaju samo rješenja jednačine $\sin x=-\frac{1}{2}$, a ta su $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ i $x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi$.

b) Dovedi jednačinu na oblik $(\sin x+\cos x)(\cos x+1)=0$. Rješenja su $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ i $x=(2k+1)\pi$.

445. **a)** Dovedi jednačinu na oblik $(1+\cos x)(\sin x-\cos x)=0$. Rješenja su $x=(2k+1)\pi$ i $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

b) Dobićeš jednačinu $(\cos x+1)(\sqrt{3}\sin x-\cos x)=0$. Rješenja: $x=(2k+1)\pi$ i $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$.

446. **a)** Jednačina se dovodi na oblik $\sin x(\cos x-\sin x)=0$. Rješenja su $x=k\pi$ i $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$. **b)** Jednačina prima oblik $2\sin x\cos x-\cos x=0$. Mora se uzeti $\cos x\neq 0$ i tada se smije skratiti sa

$\cos x$. Ostaje $2\sin x - 1 = 0$ čija su rješenja $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ i $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

447. Ako se funkcija tangens izrazi pomoću funkcije sinus i jednačina uredi, izlazi $4\sin^4 x - 8\sin^2 x + 3 = 0$; u obzir dolazi samo rješenje $\sin x = \frac{1}{2}$ tj. $\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Rješenja date jednačine su $x = a\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ gdje je $a = 1, 3, 5, 7$ a k bilo koji cio broj.

448. Desnu stranu jednačine dovedi na oblik $3\cos^2 x(\operatorname{tg} x + 1)$. Time se jednačina raspada na dvije, i to: $\operatorname{tg} x + 1 = 0$ i $\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0$. Rješenja su $x = (4k-1)\frac{\pi}{4}$ i $x = (3k \pm 1)\frac{\pi}{3}$.

449. **a)** Primjenom adicione teoreme jednačina se, na kraju, dovodi na oblik $\frac{3}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 0$; odavde je $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, a $x = 30° + k \cdot 180°$. **b)** $x = 30° + k \cdot 180°$.

450. Jednačina se može dovesti na oblik $\frac{1}{\sin x \cos x} = 4$ ili $\sin 2x = \frac{1}{2}$. Rješenja su $x = k\frac{\pi}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{12}$.

451. **a)** Primijeni formulu $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ i zamijeni $\cos^2 x$ sa $1 - \sin^2 x$. Tako se dolazi do jednačine $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ čija su rješenja $\sin x = \frac{1}{2}$ i $\sin x = -1$. Prema tome su rješenja $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$. **b)** $x = 2k\pi$, $x = (2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{3}$. **c)** $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$ **d)** $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = (2k+1)\pi$.

452. **a)** Uzmi $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. Time se jednačina dovodi na oblik $\sin x(\cos x - 1) = 0$ odakle je $\sin x = 0$ i $\cos x - 1 = 0$. Prema tome, rješenja zadane jednačine su $x = k\pi$ i $x = 2k\pi$.

b) $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ i $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ **c)** Dovedi jednačinu na oblik $\cos x(2\sin^2 x - 1) = 0$. Odavde je $\cos x = 0$ čija su rješenja $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ i $\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Iz ovih jednačina nalazimo x

$= \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4}$, $x = \pi + \frac{\pi}{4} +$

$+ 2k\pi = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4}$ i $x = 2\pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = 2(k+1) - \frac{\pi}{4}$.

d) $x = k\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

453. **a)** Jednačinu dovedi na oblik $\sin x(\cos x - \sin x) = 0$ tj. $\sin x = 0$ $\operatorname{tg} x = 1$. Rješenja su $x = k\pi$ i $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. **b)** $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ **c)** Jednačina se dovede na oblik $\cos^2 x = 3\sin^2 x$ tj. $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}$, a sam $\operatorname{tg} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ čija su rješenja $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$.

d) Izlazi: $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$ odakle je $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$.

454. Uzmi $\cos(x + 60°) = \cos[90° - (30° - x)] = \sin(30° - x)$ i $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$. Time jednačina prelazi u oblik $\sin(x + 30°) + \sin(30° - x) = 2\cos^2 x$ i, na kraju, $\cos x\left(\frac{1}{2} - \cos x\right) = 0$. Odavde nalazimo $x = (2k+1)\,90°$ i $x = (6k \pm 1)\,60°$.

455. **b)** Ako uzmemo $\sin x - \cos x = t$, jednačina prelazi u oblik $t^2 + 12t + -13 = 0$ odakle je $t_1 = -13$ i $t_2 = 1$; t_1 ne dolazi u obzir a za $t_2 = 1$ je $\sin x - \cos x = 1$ ili $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ tj. $x = \pi + 2k\pi$. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. **b)** Jednačina se postepeno dovodi na oblike: $1 - 2\sin x\cos x = \sin 2x$, $2\sin 2x = 1$, $\sin 2x = \frac{1}{2}$. Prema tome je $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ i $2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ tj. $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ i $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$.

c) Desna strana je zapravo $(\sin x + \cos x)^2$; time se jednačina može dovesti na oblik $(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x - 1) = 0$. Rješenja su $x = (4k-1)\frac{\pi}{4}$, $x = (4k+1)\frac{\pi}{2}$, $x = 4k\frac{\pi}{2}$.

456. **a)** Ako se $\cos 2x$ zamijeni sa $\cos^2 x - \sin^2 x$, jednačina se dovodi na oblik $(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x - 1) = 0$. Jednačina $\cos x - \sin x = 0$ vodi na $\operatorname{tg} x = 1$ odakle je $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Za jednačinu $\cos x +$

$+\sin x-1=0$ vidi upute uz zadatak 437 b) **b)** Jednačina je ekvivalentna skupu jednačina, i to: $\cos x+\sin x=0$ i $\cos x-\sin x-1=0$. Rješenja prve jednačine su $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ a rješenja druge vidi u uputama zadatka 437 c).

457. **a)** Ako se $\cos(\alpha+x)$ razvije pomoću adicione teoreme, jednačina će se raspasti na dvije od kojih se prva može dovesti na oblik $\operatorname{tg} x=-1$ čija su rješenja $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, a druga vodi na jednačinu $\operatorname{tg} x=\frac{\cos\alpha-1}{\sin\alpha-1}$. Za posebne vrijednosti ugla α (osim za $\alpha=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ kada jednačina nema smisla) ova će jednačina dati preostala rješenja zadane jednačine. **b)** Jednačina vodi na dvije i to $\operatorname{tg} x=1$ čija su rješenja $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ i $\operatorname{tg} x=\frac{\cos x-1}{1-\sin x}$; ova jednačina nema smisla za $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

458. Ova jednačina nema smisla za $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$; za ostale vrijednosti od x može se desna strana jednačine transformirati i, skraćivanjem sa $\cos x-\sin x$, dovesti na oblik $\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$. Time jednačina prima oblik $\cos x+\sin x=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$, a odavde $(\cos x+\sin x)\cdot(\cos x-\sin x-1)=0$. Rješenja su $x=k\pi-\frac{\pi}{4}$ i $x=2k\pi$, $x=(4k-1)\frac{\pi}{2}$.

459. **a)** Dovedi jednačinu na oblik $2\cos 2x=\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}$ i $\cos 2x(\sin 2x-1)=0$. Iz jednačine $\cos 2x=0$ nalazimo $x=(2k+1)\frac{\pi}{4}$, a iz jednačine $\sin 2x=1$ izlazi $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

b) Jednačina se dovodi na oblik $\sin^2 2x=1$ tj. $\sin 2x=\pm 1$. Rješenja su $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ i $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$.

460. **a)** Uzmi $\cos 2x=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ i $\operatorname{tg} x=t$. Time dolazimo do jednačine

$(t-1)(2t^2-t+1)=0$. Ova jednačina ima samo jedno realno rješenje, i to $t=1$ tj. $\operatorname{tg} x=1$ i odatle $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

b) Uzmi $\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ i zamijeni $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Na kraju dolazimo do jednačine $(t-1)(2t^2+t+3)=0$; $t=1$ je jedino realno rješenje. Iz $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1$ nalazimo $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

461. **a)** Primijeni $\cos 2x=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$; dobićeš jednačinu $\operatorname{tg}^3 x-2\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x=0$. Odavde izlazi $(\operatorname{tg} x)_1=0$ i $(\operatorname{tg} x)_{2,3}=1=\sqrt{2}$. Rješenje prve od tih jednačina je $x=k\pi$; preostala rješenja možemo naći napamet ako u obrazac $\operatorname{tg} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$ uvrstimo vrijednosti za $(\operatorname{tg} x)_{2,3}$. Tada izlazi $\operatorname{tg} 2x=-1$ tj. $x=\frac{3\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}$. **b)** Uzmi $\sin 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ i supstituiraj $\operatorname{tg} x=t$ pa ćeš dobiti jednačinu $t^3-2t^2+3t-2=0$ ili $t^3-t^2-t^2+t+2t-2=0$, odnosno $(t-1)(t^2-t+2)=0$. Jednačina $t^2-t+2=0$ nema realna rješenja a za $t=1$ je $\operatorname{tg} x=1$ tj. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

462. **a)** Uzmi $\operatorname{tg} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$ i $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$; time dolazimo do jednačine $\operatorname{tg}^2 x=3$ i $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$. **b)** Uzmi $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$ i $\operatorname{ctg} 2x=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x}$. Time dobivamo jednačinu $3\operatorname{tg}^2 x+2\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg} x-3=0$ čija su rješenja $\operatorname{tg} x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ i $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$. Prema tome $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ i $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$.

463. **a)** Jednačina se može dovesti na oblik $\operatorname{tg}^2 x[(1-\operatorname{tg}^2 x)^2-4]=0$ odakle je $\operatorname{tg} x=\pm\sqrt{3}$; rješenja su $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$. **b)** Jednačina se dovodi na oblik $3\operatorname{tg}^4 x-22\operatorname{tg}^2 x-7=0$ čija su rješenja $\operatorname{tg} x=\pm\sqrt{7}$ i $\operatorname{tg} x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Rješenja jednačine su $x\approx\pm 69°\,18'+k\cdot 180°$ i $x=\pm 30°+k\cdot 180°$.

464. Zamijeni $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$ i $\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}$. Time se dolazi do jednačine $\operatorname{tg} x(3-\operatorname{tg}^2 x)=0$ čija su rješenja $\operatorname{tg} x = 0$ i $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$. Prema tome su rješenja zadane jednačine $x = k\pi$ i $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$.

465. Jednačina se može dovesti na oblik $\operatorname{tg} x[(m+2)\operatorname{tg}^2 x - m] = 0$. Iz jednačine $\operatorname{tg} x = 0$ nalazimo $x = k\pi$. Preostala rješenja daje jednačina $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{\frac{m}{m+2}}$. Rješenja su realna za $\frac{m}{m+2} \geqslant 0$ a to je za $m > 0$ i $m < -2$. Ako je α onaj ugao prvog kvadranta čiji je tangens jednak $\sqrt{\frac{m}{m+2}}$, onda su preostala rješenja $x = \pm\alpha + k\pi$. Za $m = 0$ i drugo rješenje jednačine je $x = k\pi$. Kad $m \to \pm\infty$, onda $\operatorname{tg} x \to \pm 1$ a $x \to \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$. Kad $m \to -2$ preko vrijednosti koje su manje od -2, onda $x \to \frac{\pi}{2}$.

466. Primijeni $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$. Slijedi jednačina $2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2} = -\sin\frac{x}{2}$. Dijeljenjem sa $\cos\frac{x}{2}$ dobićemo $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2 = -\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; prvi član lijeve strane može se dovesti na oblik $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

Uzmimo $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ pa dobivamo jednačinu $\frac{2t}{1+t^2} + 2 = -t$ ili, na kraju, $(t+1)(t^2+t+2)=0$. Realna rješenja ima samo $t+1=0$, a tad je $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

467. **a)** Jednačinu dovedi na oblik $\sin x(4\sin^2 x - 1) = 0$; rješenja su $x = k\cdot 180°$ i $x = k\cdot 180° \pm 30°$. **b)** Budući da je $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$, jednačina prelazi u oblik $(1+\cos 4x) + \cos 2x = 0$ ili $2\cos^2 2x + \cos 2x = 0$. Odavde je $\cos 2x = 0$ i $2\cos 2x + 1 = 0$. Rješenja su $x = k\cdot 180° \pm 45°$ i $x = k\cdot 180° \pm 60°$.

468. **a)** Jednačina se redom dovodi na oblike: $1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{29}{3}$, $\frac{1-\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{13}{3}$ i, na kraju, $\sin 2x =$

$= \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Rješenja su $x = a\frac{\pi}{6} + k\pi$ gdje je $a = 1, 2, 4, 5$.

469. Desna strana $\sin x + \cos x \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x \sin\frac{x}{2} + \cos x \cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} =$

$= \frac{\cos\left(x - \frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. Lijeva strana prima oblik $\frac{1+\cos x}{\cos x} =$

$= \frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{\cos x}$. Tako jednačina dolazi u oblik $\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{\cos x} - \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 0$ ili,

na kraju, $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}(\operatorname{tg} x - 1) = 0$. Rješenja su $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ i

$x = 2k\pi + \pi$.

470. Jednačinu dovedi na oblik $(\cos x - \sin x)\cos 2x = \cos 2x$; rješenja su $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$, $x = 2k\pi$, $x = (4k-1)\frac{\pi}{2}$.

471. **a)** Jednačinu dovedi na oblik $(1 - \sin^2 x)(4\sin^2 x - 1) = 0$. Rješenja su $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $x = a\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $a = 1, 5, 7, 11$.

b) Jednačina se dovodi na oblik $\cos x(2 - \cos x - 2\sin x) = 0$; $\cos x = 0$ daje rješenja $x = (2k+1)90°$. Jednačinu $\cos x + 2\sin x = 2$ uzimamo u obliku $\frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + 2\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 2$ odakle izlazi: $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$ i

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$. Rješenja su $x = 90° + k\cdot 360°$ i $x \approx 36°\,52' + k\cdot 360°$.

c) Jednačina je ekvivalentna skupu jednačina i to $\cos x = 0$ i $\sin x + \cos x = 1$; prva od tih jednačina ima rješenje $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, a za drugu jednačinu vidi upute uz zadatak 403 b) **d)** Lijevu stranu jednačine možemo zamijeniti izrazom $\sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$;

tako jednačina prelazi u $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin x$ ili $\sin x=$ $\sin\left(\frac{3\pi}{4}-2x\right)$. Odavde zaključujemo $x=\frac{3\pi}{4}-2x+2k\pi$ i $x=\pi-\left(\frac{3\pi}{4}-2x\right)+2k\pi$ pa su rješenja zadane jednačine $x=(8k+3)\frac{\pi}{12}$ i $x=-(8k+1)\frac{\pi}{4}$.

472. Jednačina vodi na skup jednačina, i to: $\sin\frac{x}{2}=0$ i $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=1$; prva od tih jednačina ima rješenje $x=2k\pi$, a za rješenje druge vidi zadatak 437 b)

473. Dobićemo $8\sin^4x-6\sin^2x+1=0$ čija su rješenja $\sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\sin x=\pm\frac{1}{2}$. Rješenja: $x=a\frac{\pi}{4}+2k\pi$ gdje je $a=1,\ 3,\ 5,\ 7$ a k bilo koji cijeli broj i $x=b\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $b=1,\ 5,\ 7,\ 11$.

474. Jednačinu dovedi na oblik $\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=\frac{\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}\cdot\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\sin x\cos x}$; odavde dobivamo dvije jednačine, i to: $\cos x+\sin x=0$ i $\sqrt{3}(\cos x-\sin x)^2=(4-2\sqrt{3})\sin x\cos x$. Prva jednačina se dovodi na $\operatorname{tg}x=-1$ čije je rješenje $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, a druga jednačina prelazi u $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ čija su rješenja $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ i $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$.

475. Zamijeni 1 sa $\sin^2x+\cos^2x$. Slijedi jednačina $\sin x\cos x=\cos^2x$ čija su rješenja $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ i $x=(4k+1)\frac{\pi}{4}$.

476. **a)** Zamjenom $\sin 2x=2\sin x\cos x$ i dijeljenjem sa $\cos^2x$ dobićeš jednačinu $5\operatorname{tg}^2x-8\operatorname{tg}x+3=0$ čija su rješenja $\operatorname{tg}x=1$ i $\operatorname{tg}x=\frac{3}{5}=0{,}6$; prema tome je $x=45°+k\cdot 180°$ i $x\approx 31°+k\cdot 180°$. **b)** $3\operatorname{tg}^2x-4\sqrt{3}\operatorname{tg}x+3=0$; odatle je $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$ i $\operatorname{tg}x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ čija su rješenja

$x=\frac{\pi}{3}+k\pi$ i $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$. **c)** $x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi$ **d)** $x=(2k-$

$+1)\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

477. **a)** $x=45°+k\cdot 180°$, $x\approx 38°\,40'+k\cdot 180°$ **b)** $x=-45°+k\cdot 180°$, $x\approx 28°\,18'+k\cdot 180°$.

478. **a)** $x=45°+k\cdot 180°$, $x\approx 56°\,19'+k\cdot 180°$ **b)** $x=-45°+k\cdot 180°$, $x\approx 49°\,12'+k\cdot 180°$.

479. **a)** Jednačina se dovodi na oblik $\cos x(4\sin x-\sqrt{3}\sin x-\cos x)=0$; odavde slijedi $\cos x=0$, $x=(2k+1)90°$ i $\operatorname{ctg} x=4-\sqrt{3}\approx 2{,}2679$, $x\approx 23°\,48'+k\cdot 180°$. **b)** $x=k\cdot 180°$, $x\approx 66°\,12'+k\cdot 180°$.

480. **a)** Jednačina se dovodi na oblik $\sin 2x=\pm\frac{1}{2}$ odakle je $x=$

$=a\frac{\pi}{12}+k\pi$, $a=1,\ 5,\ 7,\ 11$. **b)** $x=a\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $a=1,\ 3,\ 5,\ 7$

i $x=a\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $a=1,\ 5,\ 7,\ 11$. **c)** $x=\frac{\pi}{12}+k\pi$, $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi$,

$x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$.

481. Jednačina se može dovesti na oblik $\sin x(1-\cos x+\sin x)=0$; $x=k\pi$, $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$.

482. Jednačina se dovodi na oblik $\cos^2 x\,(16\cos^4 x-20\cos^2 x+6)=0$. Rješenja ove jednačine su $\cos x=0$, $\cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Odavde izlazi: $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $x=\pi\pm\frac{\pi}{6}+$

$+2k\pi$, $x=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$ i $x=\pi\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$.

483. Ako pišemo $1+\sin 2x$ u obliku $(\sin x+\cos x)^2$ i zamijenimo $\operatorname{tg} x$ sa $\frac{\sin x}{\cos x}$, $\cos x\neq 0$, dobićemo jednačinu $(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)^2-(\cos x+\sin x)=0$. Time se jednačina raspada na dvije, i to: $\sin x+\cos x=0$ čija su rješenja $x=$ $=(4k-1)\frac{\pi}{4}$ i $\cos^2 x-\sin^2 x-1=0$ tj. $\cos 2x=1$ čije je rješenje $x=k\pi$.

484. **a)** Zamjenom $\cos 2x$ sa $\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$ jednačina prelazi u oblik $\sin 3x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=0$ ili, primjenom formule za razliku sinusa $\left(\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, dobivamo $2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$. Iz jednačine $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0$ dobićemo $x=(4k+1)\frac{\pi}{2}$, a iz $\sin\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$ slijedi $x=\frac{\pi}{10}(4k+1)$. Zadanu jednačinu možemo riješiti i na drugi način. Možemo je pisati u obliku $\sin 3x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$ a odavde zaključujemo $3x=\frac{\pi}{2}-2x+2k\pi$ i $3x=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+2k\pi$ itd. Odavde ćemo naći ista rješenja kao i na prvi način.

b) Desna strana je $\sin[90°-(x+30°)]=-\sin(x-60°)$ tako da se jednačina na kraju dobije u obliku $\sin(x-60°)=0$; iz $x-60°=k\cdot 180°$ izlazi: $x=(3k+1)\,60°$.

485. **a)** Primijeni formulu $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; izlazi jednačina $2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}=0$. Rješenja su $x=(2k+1)\frac{\pi}{3}$ i $x=(2k+1)\pi$. **b)** $x=(2k+1)\frac{\pi}{4}$ i $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$.

c) Jednačinu dovedi na oblik $2\sin 2x\cos x=0$. Rješenja su $x=k\frac{\pi}{2}$ i $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$. **d)** $x=30°-k\cdot 180°$.

486. **a)** Lijevu stranu jednačine možemo pisati: $(\sin 4x+\sin 2x)\cdot(\sin 4x-\sin 2x)=0$ i dalje $2\sin 3x\cos x\cdot 2\cos 3x\sin x=0$ i $\sin 6x\cdot\sin 2x=0$. Rješenja su $x=\frac{k\pi}{6}$ i $x=\frac{k\pi}{2}$. **b)** $x=\frac{k\pi}{7}$ i $x=\frac{k\pi}{3}$.

487. **a)** Lijevu stranu jednačine možemo pisati $\sin 6x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)$; time se jednačina može dovesti na oblik proizvoda $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left[2\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)-1\right]=0$. Rješenja su

$x=(4k-1)\frac{\pi}{4}$ i $x=(24k+3\pm4)\frac{\pi}{60}$. **b)** $x=(4k-1)\frac{\pi}{4}$, $x=(24k+3\pm4)\frac{\pi}{36}$ **c)** $x=(4k-1)\frac{\pi}{2(a-b)}$, $x=(24k+3\pm\pm4)\frac{\pi}{6(a+b)}$.

488. Ako $\cos x$ zamijenimo sa $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ i primijenimo formule za pretvaranje sume sinusa i razlike sinusa u proizvode, dobićemo $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. Uzmemo li $x-\frac{\pi}{4}=\varphi$, dobićemo jednačinu $2\cos^2\varphi+\sqrt{2}\cos\varphi-2=0$ čija su rješenja $\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\cos\varphi=-\sqrt{2}$; ovo drugo rješenje ne dolazi u obzir a za prvo je $x=2k\pi$ i $x=(4k+1)\frac{\pi}{2}$.

489. **a)** Jednačinu možemo pisati u obliku $2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}=$ $=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ ili $\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{5x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)=0$, $\cos\frac{x}{2}\cdot2\cos\frac{3x}{2}\sin x=0$. Ako svaki činilac izjednačimo sa nulom, izlaze rješenja: $x=(2k+1)\pi$, $x=(2k+1)\frac{\pi}{3}$ i $x=k\pi$.

b) Jednačinu najprije pišemo u obliku $2\sin4x\cos3x-\sin4x=0$ a zatim $\sin4x(2\cos3x-1)=0$. Rješenja su $x=\frac{k\pi}{4}$ i $x=\frac{2}{3}k\pi\pm\frac{\pi}{9}$.

c) $x=k\pi$, $x=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}$ **d)** Jednačinu dovodimo na oblik $2\cos x\sin\alpha=\sqrt{3}\sin\alpha$ a odavde $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Rješenja su: $x=$ $=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi$.

490. Jednačinu dovedi na oblike $2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}=2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}$, $\sin\frac{3x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)=0$ i na kraju

$\sin\frac{3x}{2}\cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$. Rješenja su: $x=\frac{2k\pi}{3}$, $x=$ $=(4k-1)\frac{\pi}{2}$ i $x=(4k+1)\frac{\pi}{4}$.

491. Jednačina se dovodi na oblik $\cos x[2\cos(n-1)x-1]=0$; time dolazimo do jednačina $\cos x=0$ i $\cos(n-1)x=\frac{1}{2}$ čija su rješenja $x=$ $=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ i $x=\pm\frac{\pi}{3(n-1)}+\frac{2k\pi}{n-1}$.

492. **a)** Dovedi jednačinu na oblik $2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}=2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $\sin\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)=0$ i, na kraju, $\sin\frac{5x}{2}\left(-2\sin x\sin\frac{x}{2}\right)=0$. Rješenja su: $x=\frac{2k\pi}{5}$, $x=k\pi$ **b)** $x=\frac{k\pi}{6}$, $x=\frac{2k\pi}{5}$, $x=2k\pi$ **c)** $x=(2k+1)\frac{\pi}{12}$, $x=(2k+1)\frac{\pi}{5}$, $x=2k\pi$.

493. **a)** Jednačina se dovede na oblik $\cos\frac{5x}{2}\sin x\sin\frac{x}{2}=0$ odakle je $x=(2k+1)\frac{\pi}{5}$, $x=k\pi$ i $x=2k\pi$. **b)** $x=(2k+1)\frac{\pi}{4}$, $x=k\pi$, $x=\frac{k\pi}{5}$ **c)** $x=\frac{k\pi}{2}$, $x=k\pi$, $x=(2k+1)\frac{\pi}{10}$.

494. **a)** $x=2k\pi$, $x=(4k+1)\frac{\pi}{10}$ **b)** $x=\frac{k\pi}{2}$, $x=(4k+1)\frac{\pi}{8}$ $x=(4k+3)\frac{\pi}{24}$ **c)** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

495. **a)** $x=(2k+1)\frac{\pi}{4}$, $x=(4k+1)\frac{\pi}{10}$, $x=-(4k+1)\frac{\pi}{4}$

b) Jednačinu dovodimo na oblik $2\cos 6x\sin(-3x)=2\cos 6x\cos x$; odavde je, prvo, $\cos 6x=0$, $x=(2k+1)\frac{\pi}{12}$ i, drugo, $\sin(-3x)=$ $=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, dakle $\sin 3x=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$. Iz ove jednačine nalazimo preostala rješenja zadane jednačine, i to: $x=(4k-1)\frac{\pi}{4}$ i $x=(4k+3)\frac{\pi}{8}$. **c)** Ako jednačinu pišemo u obliku

$\frac{1}{2}\cos 7x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x+\frac{1}{2}\sin 5x$ tj. $\sin\frac{\pi}{6}\cos 7x+$ $+\cos\frac{\pi}{6}\sin 7x=\sin\frac{\pi}{3}\cos 5x+\cos\frac{\pi}{3}\sin 5x$, onda je $\sin\left(\frac{\pi}{6}+7x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+5x\right)$; odavde zaključujemo $\frac{\pi}{6}+7x=\frac{\pi}{3}+$ $+5x+2k\pi$ i $\frac{\pi}{6}+7x=\pi-\frac{\pi}{3}-5x+2k\pi$. Prema tome je $x=(12k+1)\frac{\pi}{12}$ i $x=(4k+1)\frac{\pi}{24}$. **d)** Transformiši jednačinu na oblik $2\sin 2x\cos x=2\cos^2 x$, a odavde $\cos x\left[\sin 2x-\right.$ $\left.-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=0$ i, na kraju, $\cos x\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$. Rješenja su: $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $x=(4k+1)\frac{\pi}{6}$ **e)** $x=k\pi$, $x=(1-4k)\frac{\pi}{6}$, $x=(4k+3)\frac{\pi}{10}$.

496. **a)** Spojivši prvi i treći član dobićemo $2\sin 2x\cos x+\sin 2x=0$ ili $\sin 2x(2\cos x+1)=0$. Rješenja su $x=\frac{k\pi}{2}$ i $x=(2k+1)\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

b) Dobićeš $2\sin x\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}=0$; $x=k\pi$, $x=(2k+1)\frac{\pi}{3}$, $x=(2k+1)\pi$ **c)** $x=k\pi$, $x=\frac{2k\pi}{3}$, $x=2k\pi$.

497. **a)** Jednačina se dovede na oblik $\cos 2x(2\cos x+1)=0$ odakle je $x=(2k+1)\frac{\pi}{4}$ i $x=(2k+1)\pi\pm\frac{\pi}{3}$. **b)** Jednačina se, na kraju, dovede na oblik $\cos\frac{3x}{2}\cos x\cos\frac{x}{2}=0$ odakle je $x=(2k+1)\frac{\pi}{3}$, $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $x=(2k+1)\pi$. **c)** Ako uzmemo $(\cos 2x+$ $+\cos 6x)-(1+\cos 8x)=0$, onda je $2\cos 4x\cos 2x-2\cos^2 4x=0$ i, na kraju, $\cos 4x\sin 3x\sin x=0$; $x=(2k+1)\frac{\pi}{8}$ i $x=\frac{k\pi}{3}$.

d) Ako se piše $(\sin x+\sin 3x)+(\sin 2x+\sin 4x)=0$, dobićemo redom: $2\sin 2x\cos x+2\sin 3x\cos x=0$, $2\cos x(\sin 2x+\sin 3x)=0$ i,

498.

499.

500.

501.

na kraju, $4\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x=0$. Rješenja su: $x=k\cdot 72°$, $x=(2k+1)\,180°$ i $x=(2k+1)\,90°$.

498. a) Uzmi $(\sin x+\sin 3x)-(\cos x+\cos 3x)+(\sin 2x-\cos 2x)=0$; tada je $(2\sin 2x\cos x-2\cos 2x\cos x)+(\sin 2x-\cos 2x)=0$ ili $(2\cos x+1)(\sin 2x-\cos 2x)=0$. Rješenja su: $x=(3k\pm 1)\frac{2\pi}{3}$ i $x=(4k+1)\frac{\pi}{8}$.

499. Jednačinu dovodimo na oblik $(\sin x-\sin 2x)^3-3\sin x\sin 2x(\sin x+\sin 2x)+\sin^3 3x=(\sin x-\sin 2x)^3-3(\sin x-\sin 2x)^2\sin 3x+3(\sin x+\sin 2x)\sin^2 3x-\sin^3 3x$, ili $-\sin x\sin 2x(\sin x+\sin 2x)=\sin 3x(\sin x-\sin 2x)(\sin x+\sin 2x-\sin 3x)$, odnosno: $(\sin x-\sin 2x)(\sin 2x-\sin 3x)(\sin x-\sin 3x)=0$ itd. Rješenja:

$$x_1=\frac{2k\pi}{3},\quad x_2=\frac{k\pi}{2},\quad x_3=\frac{2k\pi}{5}$$

500. Spajanjem simetričnih članova izlazi $2\sin 3x\cos 2x+2\sin 3x\cos x++2\sin 3x=0$; odavde je, prvo, $\sin 3x=0$, $x=\frac{k\pi}{3}$ i, drugo, $\cos 2x+\cos x+1=0$. Ova jednačina se dovodi na $2\cos^2 x+\cos x==0$ i $\cos x(2\cos x+1)=0$. Rješenja su: $x=k\frac{\pi}{3}$, $x=(2k++1)\frac{\pi}{2}$, $x=(2k+1)\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

501. Jednačinu dovedi na oblik $4\cos x\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}-$ $-4\cos\frac{x}{2}\cos x\cos\frac{3}{2}x=0$. Odavde ćeš dobiti jednačine $\cos x=0$, $\cos\frac{x}{2}=0$ i $\operatorname{tg}\frac{3x}{2}=0$. Rješenja su: $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $x=(2k+1)\pi$ i $x=2k\frac{\pi}{3}$.

502. Primijeni formulu $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$. Time jednačina prima oblik $\frac{\sin 6x}{\cos x\cos 5x}-\frac{\sin 6x}{\cos 2x\cos 4x}=0$. Odavde dobivamo, prvo, $\sin 6x=0$, $x=k\frac{\pi}{6}$ i, drugo, $\cos 2x\cos 4x-\cos x\cos 5x=0$. Primjenom formule $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$ dobićemo $\frac{1}{2}(\cos 6x+\cos 2x)-\frac{1}{2}(\cos 6x+\cos 4x)=0$ i, na kraju, $2\sin 3x\sin x=0$; prema tome ostala rješenja su $x=k\frac{\pi}{3}$ i $x=k\pi$.

503. Imamo $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x=\frac{\sin 3x}{\cos x\cos 2x}=\frac{\operatorname{tg}3x\cos 3x}{\cos x\cos 2x}$. Time je lijevu stranu jednačine moguće dovesti na oblik

$$\operatorname{tg}3x\left(\frac{\cos 3x}{\cos x\cos 2x}-1\right)=\operatorname{tg}3x\left(\frac{\cos x\cos 2x-\sin x\sin 2x}{\cos x\cos 2x}-1\right).$$

Izraz u zagradi daje $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x$ pa jednačina prima oblik $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x=0$; odavde imamo jednačine: $\operatorname{tg}3x=0$, $\operatorname{tg}2x=0$, $\operatorname{tg}x=0$. Rješenje prve jednačine je $x=\frac{k\pi}{3}$. Treća jednačina ne daje nova rješenja jer su njezina rješenja $x=m\pi$ sadržana u rješenjima prve za $k=3m$. Druga jednačina ima rješenja $x=\frac{n\pi}{2}$. Pri parnom n rješenja te jednačine opet ne daju nova rješenja a za neparni n zadana jednačina nema smisla, jer za te vrijednosti od x $\operatorname{tg}x$ i $\operatorname{tg}3x$ postaju beskonačni. Prema tome, rješenja date jednačine su $x=\frac{k\pi}{3}$.

504. **a)** Ako uzmemo $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ i obje strane jednačine rastavimo na faktore, dobićemo dvije jednačine, i to: $\cos x-\sin x=0$ i $1+\sin x\cos x-\cos x-\sin x=0$. Rješenja prve od tih jednačina su $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, a drugu jednačinu možemo pisati u obliku $(1-\cos x)(1-\sin x)=0$ tako da su preostala rješenja $x=2k\pi$ i $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$. **b)** Analognim postupkom kao u zadatku a) jednačinu dovodimo na oblik $(\cos x+\sin x)(1+\sin x)(1-\cos x)=0$. Rješenja su: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ i $x=2k\pi$.

505. **a)** Rastavi $\sin^3 x + \cos^3 x$ na činioce; time izlazi jednačina $(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x - 1) = 0$. Rješenja: $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ i $x = k\pi$ **b)** Jednačinu možeš dovesti na oblik $\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\left(\sin x + \cos x - 1\right) = 0$. Izraz u prvoj zagradi ne može biti jednak nuli ni za koju vrijednost od x, a jednačina $\sin x + \cos x = 1$ vodi na $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ odakle je $x = 2k\pi$ i $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

506. Imamo $\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2$; analogno $\sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \left[\frac{1 - \cos 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{2}\right]^2 = \left(\frac{1 + \sin 2x}{2}\right)^2$. Tako jednačina prelazi u oblik $1 - \cos 2x + \sin 2x = 0$ ili $2\sin^2 x + 2\sin x \cos x = 0$. Rješenja su $x = k\pi$ i $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$.

507. **a)** Lijevu stranu jednačine možemo pisati $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$.

Tako jednačina prelazi u $\sin 2x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ odakle je $x = a\frac{\pi}{8} + k\pi$ gdje je $a = 1, 3, 5, 7$, a k bilo koji cijeli broj.

b) $x = a\frac{\pi}{6} + k\pi$ gdje je $a = 1, 2, 4, 5$, a k bilo koji cio broj.

c) $x = a\frac{\pi}{2} + 3k\pi$, $a = 1, 2, 4, 5$.

508. **a)** Jednačinu ćeš dovesti na oblik $6\sin^2 2x + 5\sqrt{3}\sin 2x - 12 = 0$. U obzir dolazi samo $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ odakle je $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ i $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. **b)** Slijedi jednačina $\cos^2 2x - 2\cos 2x + 1 = 0$; odavde je $\cos 2x = 1$ tj. $x = k\pi$. **c)** $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$.

509. Na osnovu poznatog izraza $a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + a b^3 + b^4)$ dolazimo, poslije sređivanja, do jednačine

$\sin x \cos x (\sin x - \cos x) \cdot (\sin^4 x + \sin^3 x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x +$

$\sin x \cos^3 x + \cos^4 x) = \sin x - \cos x$. Odavde je, prvo, $\sin x - \cos x = 0$ tj. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ i, drugo, $\sin x \cos x (\sin^4 x + \sin^3 x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin x \cos^3 x + \cos^4 x) = 1$. Ako uzmemo $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$ i $\sin^3 x \cos x + \sin x \cos^3 x = \sin x \cos x$ i zamijenimo $\sin x \cos x = y$, tada ova jednačina prelazi u oblik $y^3 - y^2 - y + 1 = 0$ ili $(y-1)^2 (y+1) = 0$; za $y = 1$ tj. $\sin x \cos x = 1$ je $\sin 2x = 2$ što je nemoguće, a za $y = -1$ izlazi $\sin 2x = -2$ što je također nemoguće.

510. **a)** Jednačinu piši u obliku $(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = \frac{7}{16}$ ili, na kraju, $\sin 2x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Rješenja su $x = a\frac{\pi}{6} + k\pi$ gdje je $a = 1, 2, 4, 5$ a k bilo koji cio broj.

511. **a)** Imamo $(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) = \frac{13}{16} \cos 2x$ i dalje $\cos 2x \left[1 - \frac{1}{4}\left(1 - \cos^2 2x\right)\right] = \frac{13}{16} \cos 2x$. Tako dobivamo jednačine $\cos 2x = 0$ a zatim $\cos 2x = \pm \frac{1}{2}$ čija su rješenja: $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$, $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$ i $x = \pm \frac{\pi}{6} + (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

b) Jednačina se postepeno dovodi na oblike $(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = \frac{7}{8} \cos 2x$, $8 - 6 \sin^2 2x = 7 \cos 2x$ i, na kraju, $6 \cos^2 2x - 7 \cos 2x + 2 = 0$; odavde je $\cos 2x = 0{,}66\,667$ i $\cos 2x = 0{,}5$. Prema tome je $x \approx \pm 24° 5' + k \cdot 180°$ i $x = \pm 30° + k \cdot 180°$.

512. Imamo $(\cos^4 x - \sin^4 x)(\cos^4 x + \sin^4 x) = \frac{5}{8} \cos 2x$ ili $\cos 2x [(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x] = \frac{5}{8} \cos 2x$. Time se jednačina raspada na dvije, i to: $\cos 2x = 0$ i $1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{5}{8}$ odakle je $\sin 2x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Prema tome su rješenja $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$ i $x = a\frac{\pi}{6} + k\pi$ gdje je $a = 1, 2, 4, 5$ a k bilo koji cio broj.

513. **a)** Prema identitetu $a^8+b^8=(a^4+b^4)^2-2a^4b^4=\left[\left(a^2+b^2\right)^2-\right.$ $\left.-\frac{1}{2}\left(2ab\right)^2\right]^2-\frac{1}{8}(2ab)^4$ jednačina prelazi u oblik $\left[\left(\sin^2 x+\right.\right.$ $\left.\left.+\cos^2 x\right)^2-\frac{1}{2}\left(2\sin x\cos x\right)^2\right]^2-\frac{1}{8}(2\sin x\cos x)^4=1$ ili $\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)^2-\frac{1}{8}\sin^4 2x=1$. Ova se jednačina raspada, na dvije, i to: $\sin^2 2x=0$ i $\sin^2 2x-8=0$; prva jednačina je zadovoljena za $x=k\frac{\pi}{2}$ a druga ni za koju vrijednost od x. **c)** Jednačinu ćeš dovesti na oblik $4\sin^4 2x-32\sin^2 2x+15=0$; u obzir dolazi samo $\sin^2 2x=\frac{1}{2}$ tj. $x=(2k+1)\frac{\pi}{8}$.

514. Ako uzmemo $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ i zamijenimo $\cos 2x=t$, dobićemo jednačinu $24t^4-10t^2-1=0$; realna rješenja su samo $t=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Iz jednačine $\cos 2x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ nalazimo $x=(2k+1)\frac{\pi}{8}$.

515. Jednačina prelazi u oblik $1-\sin x=\sin x$. Rješenja možemo pisati u obliku $x=k\cdot 180°+(-1)^k 30°$.

516. Izraz $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ dovedi na oblik $\frac{2}{\sin x}$; dobićeš jednačinu $\sqrt{2}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2\sin x}$ odakle je $x=(2k+1)\frac{\pi}{4}$.

517. Jednačina se dovede na oblik $\operatorname{tg} x=1+2\operatorname{tg} x$ odakle je $x=(4k-$ $-1)\frac{\pi}{4}$.

518. Desna strana je $-\operatorname{tg} x$, a lijeva se dovede na oblik $\frac{1}{2}[\operatorname{tg}(x+$ $+45°)-\operatorname{ctg}(x+45°)]=\frac{\sin^2(x+45°)-\cos^2(x+45°)}{2\sin(x+45°)\cos(x+45°)}=-\operatorname{ctg}(2x+$ $+90°)=\operatorname{tg} 2x$. Time jednačina prima oblik $\operatorname{tg} 2x=-\operatorname{tg} x$ ili $\operatorname{tg} 2x=$ $=\operatorname{tg}(-x)$. Odavde je $2x=-x+k\cdot 180°$ ili $x=k\cdot 60°$.

519. Imamo: $\operatorname{tg}(x-45°)\operatorname{tg}(x+45°)=\operatorname{tg}(x-45°)\operatorname{ctg}(45°-x)=-1$. Pri tome pretpostavljamo da je $x\neq(2k+1)45°$, jer za te vrijednosti od x jedan od činilaca postaje nula a drugi beskonačan. Imenilac desne strane dovodimo na oblik $-2\operatorname{ctg}x$ uz pretpostavku da je $x\neq k\cdot 180°$, jer za te vrijednosti od x ili $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ili $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ nema smisla. Dobićemo jednačinu $-\operatorname{tg}x=-\frac{4\cos^2 x}{2\operatorname{ctg}x}$ ili $\operatorname{tg}x\cos 2x=0$. Ova jednačina ima rješenja $x=k\cdot 180°$ i $x=(2k+1)45°$. Kako smo ta rješenja isključili, zaključujemo da zadana jednačina nema rješenja.

520. Jednačina se dovede na oblik $\sin 2x-2\sin(45°+x)\cos(45°+x)=0$ ili $\sin 2x-\cos 2x=0$ tj. $\operatorname{tg}2x=1$; $x=k\cdot 90°+22°30'$.

521. Drugi član lijeve strane dovedi na oblik $\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin x\cos x$. Desna strana prelazi u $\cos^2 x-\sin^2 x$. Time jednačina prelazi u oblik $2\sin^2 x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin x\cos x=0$. Odavde je $x=k\pi$ i $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$.

522. Primjenom formule $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$ i skraćivanjem sa $\sin x$ (za koji pretpostavljamo da nije nula) jednačina prelazi u $\operatorname{tg}x(\operatorname{tg}x-\sqrt{3})=0$. Rješenja od $\operatorname{tg}x=0$ isključujemo jer bi tada i $\sin x$ bio nula. Ostaje $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$ odakle je $x=(3k+1)\frac{\pi}{3}$.

523. Lijeva strana prelazi u izraz $\sin 60°\cos x$ a desna u $\operatorname{tg}x\cos^4 x+\operatorname{ctg}x\sin^4 x$ ili, ako je $\sin x\neq 0$ i $\cos x\neq 0$, u oblik $\sin x\cos^3 x+\cos x\sin^3 x=\sin x\cos x$. Time data jednačina prelazi u oblik $\cos x(\sin 60°-\sin x)=0$. Isključili smo $\cos x=0$ pa ostaje $\sin x=\sin 60°$ što daje $x=k\cdot 180°+(-1)^k\cdot 60°$.

524. Lijevu stranu dovedi na oblik $\frac{1}{4}-\sin^2 x$. Na desnu stranu primijeni obrazac $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$. Dobićeš $\frac{1}{2}(\cos 60°-\cos 2x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-(1-2\sin^2 x)\right]=\frac{-1+4\sin^2 x}{4}$. Tako jednačina prelazi u oblik $\frac{1}{4}-\sin^2 x=-\left(\frac{1}{4}-\sin^2 x\right)$ tj. $\sin^2 x=\frac{1}{4}$ ili $\sin x=\pm\frac{1}{2}$. Rješenja su $x=k\cdot 180°\pm(-1)^k\cdot 30°$ što se može pisati $k\cdot 180°\pm 30°=(6k\pm 1)30°$.

525. Uz pretpostavku da je $\sin x \neq 0$ desna strana prelazi u $2\cos^2 x$. Jednačina prima oblik $2(1-\cos^2 x)+2\sin x\cos x=0$ ili $\sin^2 x+\sin x\cos x=0$. Ova se jednačina raspada na dvije, i to: $\sin x+\cos x=0$ i $\sin x=0$. Međutim, za $\sin x=0$ desna strana jednačine nema smisla pa je rješenje jednačine samo $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$.

526. Dovedi jednačinu na oblik $\sin^2 2x=\sin 3x+\sin x$ ili $\sin^2 2x=2\sin 2x\cos x$. Dalje imamo $\sin 2x(\sin 2x-2\cos x)=0$ ili $2\sin 2x\cos x(\sin x-1)=0$. Time se jednačina raspada na tri, i to: $\sin 2x=0$, $\cos x=0$ i $\sin x=1$. Prva jednačina sadrži rješenja druge i treće pa su rješenja $x=k\frac{\pi}{2}$.

527. Lijevu stranu jednačine možemo dovesti na oblik $2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)$ a desnu na $\sqrt{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)$. Time jednačina prelazi u oblik $\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\left(2\cos\frac{x}{2}-\sqrt{2}\right)=0$ čija su rješenja $x=k\cdot 360^\circ-90^\circ$ i $x=k\cdot 720^\circ\pm 90^\circ$.

528. Jednačina se dovede na oblik $\frac{\sin^3 x(\sin x+\cos x)}{\sin x}+\frac{\cos^3 x(\sin x+\cos x)}{\cos x}=\cos^2 x-\sin^2 x$. Uz pretpostavku da je $\sin x\neq 0$ i $\cos x\neq 0$ skratimo razlomke pa jednačina prelazi u oblik $(\sin x+\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x-\cos x+\sin x)=0$. Zamijenivši $\sin^2 x+\cos^2 x$ sa 1 jednačina se raspada na dvije, i to: $\sin x+\cos x=0$ i $\cos x-\sin x=1$. Prva jednačina ima rješenje $x_1=(4k-1)\frac{\pi}{4}$ a druga $x_2=2k\pi$ i $x_3=(4k-1)\frac{\pi}{2}$. Rješenja x_2 i x_3 otpadaju, jer je za $x_2=2k\pi$ $\sin x=0$ a za x_3 je $\cos x=0$. Prema tome su rješenja zadane jednačine $x=(4k-1)\frac{\pi}{4}$.

529. **a)** Prema formulama $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$ i $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ je $\cos^3 x=\frac{\cos 3x+3\cos x}{4}$, $\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}$ pa se jednačina može dovesti na oblik $3(\cos 3x\cos x+\sin 3x\sin x)+\cos^2 3x-\sin^2 3x=0$ ili $3\cos 2x+\cos 6x=0$. No $\cos 6x=4\cos^3 2x-3\cos 2x$ pa dobivamo $4\cos^3 2x=0$; odav-

de je $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}=(2k+1)\frac{\pi}{4}$.

b) Lijeva strana jednačine prima oblik $3\sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)=\frac{3}{2}\sin 2x\cos 2x=$ $=\frac{3}{4}\sin 4x$ pa zadana jednačina prelazi u $\sin 4x=\frac{1}{2}$. Odavde je $x=\frac{k\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{24}$.

530. Uzmi $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ i $\cos 4x=2\cos^2 2x-1$ pa, na kraju, izlazi $\cos 2x=0$. Rješenja su $x=(2k+1)\frac{\pi}{4}$.

531. Jednačina se može dovesti na oblik $\sin^3 2x+7\sin^2 2x-8=0$. Jedno rješenje ove jednačine očito je $\sin 2x=1$. Ostala rješenja nalazimo iz jednačine $\sin^2 2x+8\sin 2x+8=0$. Rješenja ove jednačine su $-4\pm 2\sqrt{2}$. Ovo su brojevi po apsolutnoj vrijednosti veći od 1 pa ne dolaze u obzir. Rješenje zadane jednačine je samo rješenje jednačine $\sin 2x=1$, a to je $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

532. Desnu stranu dovedi na oblik $3\sin x\cos x+3\cos^2 x$ i podijeli obje strane sa $\cos^2 x$. Dobićeš jednačinu $\operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg} x+1)=3(\operatorname{tg} x+1)$ ili $(\operatorname{tg} x+1)(\operatorname{tg}^2 x-3)=0$. Odavde je $\operatorname{tg} x=-1$ i $\operatorname{tg} x=\pm\sqrt{3}$, pa je $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$ i $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$.

533. Jednačina se dovodi na oblik $2\left(\frac{\sin 3x}{\cos 3x}-\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right)=$ $=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\left(\frac{\sin 2x\ \sin 3x}{\cos 2x\ \cos 3x}+1\right)$ i $2(\sin 3x\cos 2x-$ $-\cos 3x\sin 2x)\cos 2x=\sin 2x(\sin 2x\sin 3x+\cos 2x\cos 3x)$. Odavde je $2\sin x(\cos 2x-\cos^2 x)=-2\sin^3 x=0$, pa je $x=k\pi$.

534. Dovedi jednačinu na oblik $\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)^2-$ $-\frac{1}{4}\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{5}{4}=0$ ili $4\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-$ $-5=0$. Odavde je $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=-1$, $x=-\frac{5\pi}{12}+k\pi$. Drugo rješenje kvadratne jednačine ne dolazi u obzir jer je $|\cos x|\leqslant 1$.

535. Pomnožimo lijevu i desnu stranu zadane jednačine sa $32 \sin \frac{\pi x}{31}$ (to je dopušteno jer rješenje jednačine $\sin \frac{\pi x}{31} = 0$, a to je $x = 31k$, ne zadovoljava zadanu jednačinu) i primijenimo više puta formulu $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$. Time jednačina prelazi u oblik

$\sin \frac{32\pi x}{31} = \sin \frac{\pi x}{31}$ ili $\sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{33\pi x}{62} = 0$; odavde je $x_1 = 2n$ i $x_2 = \frac{31}{33}(2n+1)$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Iz ovih rješenja moramo isključiti sva koja su oblika $x = 31k$. Za rješenje x_1 to nas vodi do jednačine $2n = 31k$ odakle vidimo da k mora biti parni broj tj. $k = 2m$ i $n = 31m$, $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Za rješenje x_2 jednačina $\frac{31}{33}(2n+1) = 31k$ ili $2n + 1 = 33k$ moguća je za neparne $k = 2m + 1$ odnosno $n = 33m + 16$, $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Prema svemu vidimo da su rješenja zadane jednačine $x = 2n$ za $n \neq 31m$, $x_2 = \frac{31}{33}(2n+1)$ za $n \neq 33m + 16$, $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

536. Jednačinu ćeš dovesti na oblik $1 - \operatorname{tg} x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}$ ili $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0$. Rješenja su $x = k\pi$ i $x = (4k+1)\frac{\pi}{4}$.

537. Jednačina se dovede na oblik $\sin 5x - \sin 3x = 0$ ili $2 \sin x \cos 4x = 0$. Odavde je $x = k\pi$ i $x = \frac{\pi}{8}(4k \pm 1)$.

538. Jednačina se dovede na oblik $2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = 0$. Rješenja su $x = (2k+1)\pi$ i $x = (3k \pm 1)\frac{4\pi}{3}$.

539. Dovedi jednačinu na oblik $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{1}{2 \sin x \cos x}$ ili $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin 2x}$. Odavde je $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin 2x = 1$. Budući da je $|\sin \alpha| \leqslant 1$, gornja jednačina postoji samo ako je $\sin\left(x +\right.$

$+\frac{\pi}{4}\Big)=-1$ i $\sin 2x=-1$ ili ako je istovremeno $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=$ $=1$ i $\sin 2x=1$. Prve dvije jednačine nisu istovremeno zadovoljene ni za koje x. Druge dvije jednačine istovremeno zadovoljava samo $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$, pa je to i rješenje zadane jednačine.

540. Podijeli jednačinu sa 2 i zamijeni $\frac{1}{2}$ sa $\cos\frac{\pi}{3}$ a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sa $\sin\frac{\pi}{3}$, pa će jednačina primiti oblik $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin 4x=1$. Ova jednačina može postojati samo onda ako je istovremeno $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\pm 1$ i $\sin 4x=\pm 1$. Prva od ovih jednačina je zadovoljena za $x=-\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$ a druga za $x=\frac{1}{4}\left(\pm\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$ gdje su k i n cijeli brojevi. Ako izjednačimo desne strane i skratimo sa π, dolazimo do jednačine $-\frac{1}{3}\pm\frac{1}{2}+2k=\pm\frac{1}{8}+\frac{n}{2}$ tj. $12n-$ $-48k=-8\pm 9$. Za cijele brojeve k i n lijeva strana daje paran broj a desna neparan (1 ili -17). Prema tome, ova jednačina nije moguća za cijele brojeve k i n što je i trebalo dokazati.

541. Budući da je $|\cos\alpha|\leqslant 1$ a $\sin\alpha\geqslant -1$, to je $|\cos 4x-\cos 2x|\leqslant$ $\leqslant 2$ i $\sin 3x+5\geqslant 4$. Prema tome, lijeva strana zadane jednačine nije veća od 4, a desna strana nije manja od 4. Zaključujemo da mora biti $|\cos 4x-\cos 2x|=+2$ i $\sin 3x=-1$. Prva od ovih jednačina postoji sa $\cos 4x=-1$ i $\cos 2x=1$ ili $\cos 4x=1$ i $\cos 2x=-1$. Prema tome, postoje ove mogućnosti:

$$\begin{cases}\cos 4x=-1, & x=(2k_1+1)\frac{\pi}{4}\\ \cos 2x=1, & x=k_2\pi\\ \sin 3x=-1, & x=(4k_3-1)\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

ili

$$\begin{cases}\cos 4x=1, & x=k_1\frac{\pi}{2}\\ \cos 2x=-1, & x=(2k_2+1)\frac{\pi}{2}\\ \sin 3x=-1, & x=(4k_3-1)\frac{\pi}{6}.\end{cases}$$

U prvom slučaju ne postoje cijeli brojevi k_1, k_2 i k_3 za koje bi bile istovremeno zadovoljene sve tri jednačine, a u drugom slučaju postoje, i to: $x=(4n+1)\frac{\pi}{2}$ gdje je $n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots$

542. Uzmimo $\cos 6x = 2\cos^2 3x - 1$ a zatim $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$. Proizlazi jednačina $\cos^2 x \cdot (8\cos^2 x - 3) = 0$. — Rješenja: $x_1 = 90° + k \cdot 180°$, $x_2 = \pm 52°14' + k \cdot 360°$ i $x_3 = \pm 127°46' + k \cdot 360°$.

543. Zamijeni $2\sin^2 x$ sa $1-\cos 2x$ pa jednačina prelazi u oblik $2\sin 3x\cos 2x - \cos 2x = 0$. Odavde je $\cos 2x = 0$ i $\sin 3x = \frac{1}{2}$. Rješenja su: $x=(2k+1)\cdot 45°$ i $x = k\cdot 60° + (-1)^k \cdot 10°$.

544. Pomoću relacija $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$ i $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{\sin x}$ zadana jednačina se raspada na dvije, i to: $1+\cos x = 0$ i $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Rješenja su: $x=(2k+1)\pi$ i $x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{3}$.

545. Jednačina se dovede na oblik $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$. Rješenja su: $x = 2k\pi$ i $x=(4k+1)\frac{\pi}{2}$.

546. **a)** Prema formuli $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$ dobićemo $\frac{1}{2}\cos(x-7x) - \cos(x+7x)] = \frac{1}{2}[\cos(3x-5x) - \cos(3x+5x)]$ ili $\cos 6x - \cos 2x = 0$. Ova jednačina se raspada na dvije, i to: $\sin 4x = 0$ i $\sin 2x = 0$. Rješenja druge od tih jednačina su sadržana u rješenjima prve pa su sva rješenja $x = \frac{k\pi}{4}$.

b) Primijeni formulu $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$. Rješenja su: $x = \frac{k\pi}{2}$ i $x=(2k+1)\frac{\pi}{8}$. **c)** Imamo:

$4\sin x\sin 2x\sin 3x - \sin 2(2x) = 0$ ili $\sin 2x(2\sin x\sin 3x - \cos 2x) = 0$. Zamjenom izraza $2\sin x\sin 3x$ sa $\cos 2x - \cos 4x$

dobićemo jednačinu $\sin 2x \cos 4x = 0$ odakle je $x = k\frac{\pi}{2}$ i $x = (2k+1)\frac{\pi}{8}$.

547. Zamijeni $1 \div \cos 4x$ sa $2\cos^2 2x$. Rješenja su: $x = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ i $x = k\frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{24}$.

11. Trigonometrijske jednačine (jednadžbe) sa dvije nepoznate

548. Iz prve jednačine je $\cos y = -\sin x$. Zamjenom u drugoj jednačini dobivamo kvadratnu jednačinu samo sa jednom nepoznatom i to $\sin^2 x + \sin^2 x = \frac{1}{2}$. Odavde nalazimo $\sin x = \pm\frac{1}{2}$ a iz prve jednačine $\cos y = \mp\frac{1}{2}$. Prema tome su rješenja zadanog sistema:
$x_1 = k \cdot 180° + (-1)^k \cdot 30°$, $y_1 = k \cdot 360° \pm 120°$ i
$x_2 = k \cdot 180° - (-1)^k \cdot 30°$, $y_2 = k \cdot 360° \pm 60°$.

549. a) Druga jednačina se dovodi na oblik $2 \sin\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2} = 1$. No prema prvoj jednačini sistema je $\cos\frac{x-y}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ pa gornja jednačina prima oblik $\sin\frac{x+y}{2} = 1$ odakle je $\frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Iz sistema $x+y = \pi + 4k\pi$, $x-y = \frac{2\pi}{3}$ nalazimo $x = (12k+5)\frac{\pi}{6}$, $y = (12k+1)\frac{\pi}{6}$.

b) Drugu jednačinu dovodimo na oblik $2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = 0$. Vodeći računa o prvoj jednačini prethodna jednačina daje $\cos\frac{x+y}{2} = 0$ odakle je $x+y = (2k+1)\pi$. Iz ove jednačine i prve jednačine zadanog sistema naći ćemo $x = (6k+5)\frac{\pi}{6}$ i $y = (6k+1)\frac{\pi}{6}$.

c) $x = (12k-3\pm1)\frac{\pi}{6}$, $y = (-12k+3\mp1)\frac{\pi}{6}$.

550. a) Drugu jednačinu dovodimo na oblik $2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 0$ ili, u vezi sa prvom jednačinom, $\cos\frac{x+y}{2} = 0$ odakle je $\frac{x-y}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Iz ove jednačine i prve jednačine zadanog sistema dobićemo $x=(3k+2)\frac{\pi}{3}$ i $y=(3k+1)\frac{\pi}{3}$.

b) $y=-x$ **c)** Drugoj jednačini možemo dati oblik $\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=1$. Rješenja su: $x=(12k\pm 5)\frac{\pi}{6}$ i $y=(2-12k)\frac{\pi}{6}$.

551. a) Ako jednačine pišemo u obliku $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ i podijelimo prvu drugom, dobićemo $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=1$. Odavde je $\frac{x+y}{2}=45°$. Ako ovu vrijednost zamijenimo u bilo kojoj od gornjih jednačina, dobićemo $\cos\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. Ovu jednačinu je moguće pisati i u ovom obliku $\cos\frac{x-y}{2}=$ $=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos 60°\cos 45°+\sin 60°\sin 45°=\cos(60°-$ $-45°)=\cos 15°$. Prema tome je $x-y=30°$. Rješenja su: $x=60°$, $y=30°$. **b)** $x=120°$, $y=30°$.

552. a) Drugu jednačinu možemo uzeti u obliku $\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}=-1$, a u vezi sa prvom $\frac{5}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}=-1$. Odavde je $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=6$. Iz ove jednačine kao i prve jednačine zadanog sistema vidimo da su $\operatorname{tg}x$ i $\operatorname{tg}y$ rješenja jednačine $t^2-5t+6=0$ tj. $\operatorname{tg}x=3$, $\operatorname{tg}y=2$ ili obrnuto; $y\approx 63°30'+k_1\cdot 180°$, $x\approx 71°30'+k_2\cdot 180°$ ili obrnuto. **b)** $\operatorname{tg}x=2$, $\operatorname{tg}y=1$; $x\approx 63°30'+k_1\cdot 180°$, $y=45°+k_2\cdot 180°$; $\operatorname{tg}x=-5$, $\operatorname{tg}y=8$ itd.

553. Drugu jednačinu pišemo u obliku $2\cos^2 x-1+2\cos^2 y-1=\frac{1}{2}$ ili $\cos^2 x+\cos^2 y=\frac{5}{4}$. Iz prve jednačine sistema je $(\cos x+\cos y)^2=$ $=\frac{5+2\sqrt{6}}{4}$ ili odavde $\cos x\cos y=\frac{\sqrt{6}}{4}$. Prema ovoj jednačini, kao i prvoj jednačini sistema, $\cos x$ i $\cos y$ su rješenja jednačine $t^2-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}t+\frac{\sqrt{6}}{4}=0$. Odavde je $t_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $t_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$ tj. $\cos x=$ $=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x=30°$, $\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=45°$ i obrnuto.

554. a) Drugu jednačinu pišemo $\cos 2x+\cos 2y=-\frac{1}{2}$ ili $\cos(x+$

$+y)\cos(x-y)=-\frac{1}{4}$. Odavde je $\cos(x+y)=-\frac{1}{2}$ a za $x+y$ nalazimo dvije vrijednosti, i to: $x+y=120°+k\cdot 360°$ i $x+y=240°+k\cdot 360°$. Ako svaku od ovih jednačina riješimo zajedno sa prvom jednačinom zadanog sistema, dobićemo rješenja:

$$\begin{cases} x_1=90°-k\cdot 180° \\ y_1=30°+k\cdot 180° \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} x_2=150°+k\cdot 180° \\ y_2=90°+k\cdot 180° \end{cases}$$

b) Postupkom sličnim u prethodnom zadatku dobićemo $\cos(x-y)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ odnosno $x-y=\pm 30°+k\cdot 360°$. Rješenja su:

$$\begin{cases} x_1=90°+k\cdot 180° \\ y_1=60°-k\cdot 180° \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} x_2=60°+k\cdot 180° \\ y_2=90°-k\cdot 180° \end{cases}$$

c) Uzmi $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ i analogno $\sin^2 y$ pa će druga jednačina glasiti $\cos(x+y)\cos(x-y)=-\frac{3}{4}$. Rješenja su:

$$\begin{cases} x_1=90°+k\cdot 180° \\ y_1=60°-k\cdot 180° \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} x_2=60°+k\cdot 180° \\ y_2=90°-k\cdot 180° \end{cases}$$

d) $x_1=90°+k\cdot 180°$, $y_1=45°+k\cdot 180°$; $x_2=-45°+k\cdot 180°$, $y_2=-90°+k\cdot 180°$.

555. **a)** Primijeni formulu $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$ pa će druga jednačina, a u vezi sa prvom, dati $\cos(x-y)=\frac{\sqrt{6}}{2}-\cos 75°=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\cos(45°-30°)=\cos 15°$. Za $x-y$ dobivamo dvije vrijednosti $x-y=\pm 15°+k\cdot 360°$. Rješenja su: $x_1=45°+k\cdot 180°$, $y_1=30°-k\cdot 180°$ i $x_2=30°+k\cdot 180°$, $y_2=45°-k\cdot 180°$. **b)** $x=(12k+3\pm 5)\frac{\pi}{12}$, $y=(12k-3\pm 5)\frac{\pi}{12}$ **c)** $x=(3k+1)\frac{\pi}{3}$, $y=(6k-1)\frac{\pi}{6}$

d) $x=(3k+2)\frac{\pi}{6}$, $y=(3k-1)\frac{\pi}{6}$.

556. Ako zamijenimo $\operatorname{ctg} x$ sa $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$ i analogno $\operatorname{ctg} y$, onda nam druga jednačina, a u vezi sa prvom, daje $\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Ova jednačina, kao i prva jednačina zadanog sistema, daju $\operatorname{tg} x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ i $\operatorname{tg} y=1$ i

obrnuto. Prema tome su rješenja: $x_1=\frac{\pi}{6}+k\pi$, $y_1=\frac{\pi}{4}+k\pi$ i obr- 561

nuto $x_2=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $y_2=\frac{\pi}{6}+k\pi$.

557. **a)** Ako primijenimo formulu $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$, zamijenimo $\cos x\cos y$ sa $\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$ i uzmemo da je, prema prvoj jednačini sistema, $x+y=\frac{\pi}{4}$, onda druga jednačina glasi $\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}+\cos(x-y)\right]}=1$, a odavde je $\cos(x-y)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ odnosno $x-y=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$. Ove jednačine zajedno sa prvom jednačinom sistema daju rješenja: $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $y=-k\pi$ i $x=k\pi$, $y=-$ 562

$-\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **b)** $x=(3\pm 1+12k)\frac{\pi}{12}$,

$y=(3\mp 1-12k)\frac{\pi}{12}$ **c)** $x=(3k+2)\frac{\pi}{6}$, $y=(3k+1)\frac{\pi}{6}$.

558. **a)** Ako drugu jednačinu sistema shvatimo kao proporciju pa primijenimo poznato svojstvo proporcija, dobićemo $\frac{\sin x+\sin y}{\sin x-\sin y}=\frac{1+2}{1-2}$. Odavde izlazi $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}\operatorname{ctg}\frac{x-y}{2}=-3$ i, na kraju, $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=-\sqrt{3}$. Iz ove jednačine nalazimo $x+y=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$. Rješenja su 563

$x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$, $y=-\frac{\pi}{2}+k\pi$ **b)** $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$, $x=k\pi$.

559. Iz prve jednačine je $x=2y$ pa dolazimo do jednačine $2\sqrt{3}\cos^2 y-$ $-\cos y-\sqrt{3}=0$. Postavljeni uslov zadovoljava samo $\cos y=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Rješenja su: $y=30°$, $x=60°$.

560. Druga jednačina vodi na jednačinu $\sin\frac{x-y}{2}=\sin\alpha$. Iz te jednačine zaključujemo: $x-y=2\alpha+4k\pi$ i $x-y=2\pi-2\alpha+4k\pi$. Ako svaku od ovih jednačina riješimo u sistemu sa prvom od zadanih jednačina, izlazi: $x=(1+6k)\frac{\pi}{3}+\alpha$, $y=(1-6k)\frac{\pi}{3}-\alpha$ i $x=(3k+2)\frac{2\pi}{3}-\alpha$, $y=-(3k+1)\frac{2\pi}{3}+\alpha$.

561. Dijeljenjem jednačina dobićemo $\cos x \cos y = \frac{\sqrt{6}}{4}$. Ova jednačina, kao i prva jednačina sistema, vode na novi sistem, i to: $\frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)] = \frac{\sqrt{6}}{4}$, $\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)] = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Odavde je $\cos(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \cos 15°$ i $\cos(x+y) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 75°$. Prema tome je $x-y = \pm 15° + k \cdot 360°$, a $x+y = \pm 75° + m \cdot 360°$. Time dolazimo do četiri sistema jednačina koja daju ova rješenja:

$$x_1 = 45° + (m+k)\,180°, \qquad y_1 = 30° + (m-k)\,180°$$

$$x_2 = 30° + (m+k)\,180°, \qquad y_2 = 45° + (m-k)\,180°$$

$$x_3 = -30° + (m+k)\,180°, \qquad y_3 = -45° + (m-k)\,180°$$

$$x_4 = -45° + (m+k)\,180°, \qquad y_4 = -30° + (m-k)\,180°.$$

562. Ako prvu jednačinu oduzmemo od druge a zatim obje jednačine saberemo, dolazimo do sistema $\cos 2x - \cos(x+y) = 0$, $1 + \cos(x-y) = 0$. Prva jednačina toga sistema može se dovesti na oblik $2 \sin \frac{3x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} = 0$; faktor $\sin \frac{x-y}{2} = 0$ dovodi do $x-y = 2k\pi$; ovo ne možemo uzeti u obzir, jer $\cos(x-y)+1 = 0$ zahtijeva $x-y = (2n+1)\pi$. Jednačina $\sin \frac{3x+y}{2} = 0$ je zadovoljena za $3x+y = 2k\pi$. Iz sistema $x-y = (2n+1)\pi$, $3x+y = 2k\pi$ nalazimo $x = \frac{2k+2n+1}{4}\pi$, $y = \frac{2k-6n-3}{4}\pi$.

563. Prva jednačina se dovede na oblik $\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = 1$. Odavde je, a u vezi sa drugom jednačinom, $\sin(x+y) = \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Dakle $x+y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ (1) i $x+y = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4}$ (2). Druga jednačina prelazi u oblik $\cos(x+y) + \cos(x-y) = \sqrt{2}$ ili $\cos(x-y) = \sqrt{2} - \cos(x+y)$. Za $x+y$ iz jednačine (1) ova jednačina prelazi u $\cos(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, i $x-y = \pm\frac{\pi}{4} + 2m\pi$. Za $x+y$ iz jednačine (2) dobićemo $\cos(x-y) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ što je nemoguće. Prema tome, za iznalaženje nepoznatih x i y preostaju jednačine: $x+y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$,

$x-y=\pm\frac{\pi}{4}+2m\pi$. Odavde je:

$$\begin{cases} x_1=\frac{\pi}{4}+(k+m)\pi \\ y_1=(k-m)\pi \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} x_2=(k+m)\pi \\ y_2=\frac{\pi}{4}+(k-m)\pi. \end{cases}$$

564. Prva jednačina se dovede na oblik $\frac{1}{2}[\cos x+\cos y]=\frac{1}{2}$. Imamo $\cos x=\cos y=\frac{1}{2}$. Rješenja su: $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$, $y=2m\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

565. Jednačina je zadovoljena za $x+y=k\pi$, $x-y=m\pi$. Odavde je $x=\frac{k+m}{2}\pi$, $y=\frac{k-m}{2}\pi$; prema uslovu zadatka mora biti $0\leqslant k+m\leqslant 2$, $0\leqslant k-m\leqslant 2$. Odavde nalazimo rješenja:

$k=0,\quad m=0,\quad x_1=0,\quad y_1=0$

$k=1,\quad m=0,\quad x_2=\frac{\pi}{2},\quad y_2=\frac{\pi}{2}$

$k=1,\quad m=-1,\quad x_3=0,\quad y_3=\pi$

$k=1,\quad m=1,\quad x_4=\pi,\quad y_4=0$

$k=2,\quad m=0,\quad x_5=\pi,\quad y_5=\pi.$

566. Prva jednačina se može pisati u obliku $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$ i, na kraju, $2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}=0$. Ako faktore izjednačimo sa nulom, dobićemo:

(a) $x+y=2k\pi$
$x=2m\pi$, y bilo koji broj
$y=2n\pi$, x bilo koji broj
$\}$ $(k, m, n=0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

Jednačina (a) vodi na $|x|+|y|\geqslant 2|k|\pi$, a, s obzirom na drugu jednačinu sistema, u obzir dolazi samo $k=0$. Time jednačina (a) i druga jednačina zadanog sistema vode na sistem $x=-y$, $|x|+|y|=1$. Odavde je:

$x_1=\frac{1}{2},\quad y_1=-\frac{1}{2}\qquad x_2=-\frac{1}{2},\quad y_2=\frac{1}{2}$

$x_3=1,\quad y_3=0\qquad x_4=-1,\quad y_4=0$

$x_5=0,\quad y_5=1\qquad x_6=0,\quad y_6=-1.$

567. Pomoću formule $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$ prva jednačina prelazi u oblik $4\cos^2(x-y)+4\cos(x+y)\cos(x-y)+1=0$. Prema drugoj jednačini zadanog sistema odavde dobivamo $4\cos^2(x-y)+4\cos a\cos(x-y)+1=0$. Rješenje ove kvadratne jednačine je $\cos(x-y)=\frac{-2\cos a \pm \sqrt{4\cos^2 a-4}}{4}$. Jednačina ima rješenje samo za $\cos^2 a=1$, a to je za $a=k\pi$. Tada je $\cos(x-y)=-\frac{\cos a}{2}$. Kada je $\cos a=1$ tada je $a=2m\pi$, te $\cos(x-y)=-\frac{1}{2}$; u tom slučaju imamo sistem $x-y=\pm\frac{2}{3}\pi+2k\pi$, $x+y=2m\pi$ čija su rješenja $x=\pm\frac{\pi}{3}+(k+m)\pi$, $y=\mp\frac{\pi}{3}+(m-k)\pi$. Kada je $\cos a=-1$ tada je $a=(2m+1)\pi$, te je (napiši sistem!) $x=\pm\frac{\pi}{6}+(k+m)\pi+\frac{\pi}{2}$, $y=\mp\frac{\pi}{6}+(m-k)\pi+\frac{\pi}{2}$.

568. Jednačine prelaze u oblik

$2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=a$ i $2\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=b$

odakle proizlazi $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=\frac{a}{b}$. Tada je $\cos(x-y)=$

$$=\cos^2\frac{x-y}{2}-\sin^2\frac{x+y}{2}=\frac{1}{1-\frac{a^2}{b^2}}-\frac{\frac{a^2}{b^2}}{1-\frac{a^2}{b^2}}=\frac{b^2-a^2}{b^2-a^2}.$$

569. Dobićemo $\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}2y=2\frac{(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y)(1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y)}{1-[(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y)^2-2\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y]+(\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y)^2}$.

Pomoću zadanih relacija izlazi $\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}2y=2\cdot\frac{a(1-b)}{(b+1)^2-a^2}$.

12. Trigonometrijske nejednačine (nejednadžbe)

570. **a)** Nejednačina je zadovoljena za $0<x<\pi$, $2\pi<x<3\pi$, $4\pi<x<5\pi$, ... i uopšte $2k\pi<x<(2k+1)\pi$.

b) $(2k+1)\pi<x<2(k+1)\pi$ **c)** $2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}$

d) $2k\pi+\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{3\pi}{2}$.

571. **a)** $30°<x<150°$ ili uopšte $30°+k\cdot 360°<x<150°+k\cdot 360°$

b) $-30°+k\cdot 360°\leqslant x\leqslant 30°+k\cdot 360°$ **c)** $-45°+k\cdot 360°<x<$ $<225°+k\cdot 360°$ **d)** $\frac{2\pi}{3}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{4\pi}{3}+2k\pi$.

572. **a)** Kako je $2k\pi+\frac{\pi}{4}<2x<\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ to je $\frac{\pi}{8}+k\pi<x<\frac{3\pi}{8}+k\pi$.

b) $\frac{\pi}{6}+k\pi<x<\frac{5\pi}{6}+k\pi$ **c)** $70°+k\cdot 120°\leqslant x\leqslant 110°+k\cdot 120°$

d) $(6k+1)\frac{\pi}{9}<x<(6k+5)\frac{\pi}{9}$ **e)** $(12k+5)\frac{\pi}{3}<x<4(k+1)\pi+\frac{\pi}{3}$

f) $3k\pi+\frac{3\pi}{8}<x<3k\pi+\frac{9}{8}\pi$.

573. **a)** U intervalu od 0° do 360° je $\sin x>0$ za $0°<x<180°$ a $\cos x>\frac{1}{2}$ za $0°<x<60°$ i $300°<x<360°$. Obje nejednačine su istovremeno zadovoljene za $0°<x<60°$ ili uopšte $k\cdot 360°<x<60°+k\cdot 360°$.
b) $(6k+1)\,60°<x<(2k+1)\cdot 180°$ **c)** $k\cdot 360°-45°<x<45°+$ $+k\cdot 360°$ **d)** $240°+k\cdot 360°<x<330°+k\cdot 360°$.

574. $k\cdot 180°<x<45°+k\cdot 180.°$

575. Nejednačina se na kraju dovodi na oblik $\operatorname{tg} x<-1$ čije je rješenje $90°+k\cdot 180°<x<135°+k\cdot 180°$.

576. Jednačina $4\sin^2 x-2(1+\sqrt{3})\sin x+\sqrt{3}=0$ ima rješenja $\sin x=$ $=\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin x=\frac{1}{2}$. Slučaj **a)** nastupa za $-1\leqslant\sin x<\frac{1}{2}$ i $\frac{\sqrt{3}}{2}<$ $<\sin x\leqslant 1$, a to je za $0°<x<30°$, $60°<x<120°$ i $150°<x<360°$.

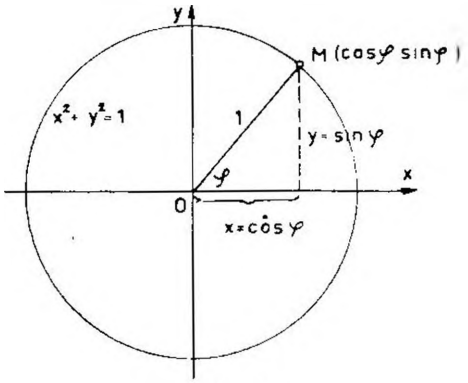
U slučaju **b)** je $\frac{1}{2}<\sin x<\frac{\sqrt{3}}{2}$, a to je za $30°<x<60°$ i $120°<x<150°$.

577. Nule trinoma su $\cos x=\frac{1}{2}$ i $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; trinom je pozitivan za $-1\leqslant\cos x<\frac{1}{2}$ i $\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos x\leqslant 1$, a to je za $0<x<\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}$ i $\frac{7\pi}{4}<x<2\pi$. **b)** $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}<x<\frac{7\pi}{4}$.

578. Nejednačina se dovodi na oblik $\sin x\left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)>0$. Odavde je

Rješenja: $2k\pi+\frac{\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ i $2k\pi+\pi<x+<2\pi+2k\pi$.

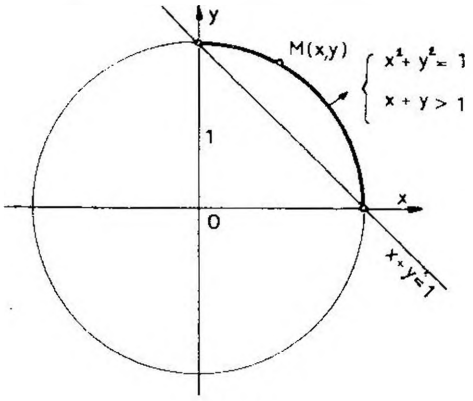
579. Uzmimo nejednačinu u obliku $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}+\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}>1$ ili, na kraju, $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-1\right)<0$. Odavde je $0<\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}<1$, a to je za $0°<\varphi<90°$ i uopšte za $k\cdot 360°<\varphi<90°+k\cdot 360°$. Nejednačinu je moguće riješiti i na ovaj način: funkcije $\sin\varphi$ i $\cos\varphi$ možemo smatrati koordinatama tačke M koja leži na trigonometrijskom krugu (sl. 65 i 66).



Sl. 65

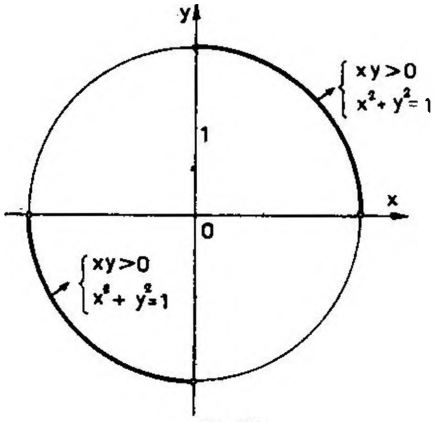
Stoga $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$ zadovoljavaju jednačinu toga kruga pa je nejednačina $\sin\varphi+\cos\varphi>1$ ekvivalentna algebarskom sistemu $x+y>1$, $x^2+y^2=1$. Rješenje ovog sistema čine sve tačke $M(x,y)$ odnosno

M $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ koje leže na trigonometrijskom krugu za $0° < \varphi <$ $< 90°$ ili uopšte $k \cdot 360° < \varphi < 90° + k \cdot 360°$.



Sl. 66

580. a) Nejednačina je ekvivalentna sistemu $x^2 + y^2 = 1$, $xy > 0$ (sl. 67).



Sl. 67

Rješenja su: $2k\pi < \varphi < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

i

$\pi + 2k\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi.$

b) Rješenja su: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \varphi <$

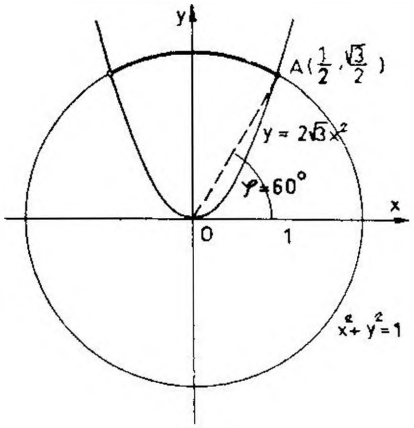
$< \pi + 2k\pi$ i $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < \varphi < 2\pi +$

$+ 2k\pi.$

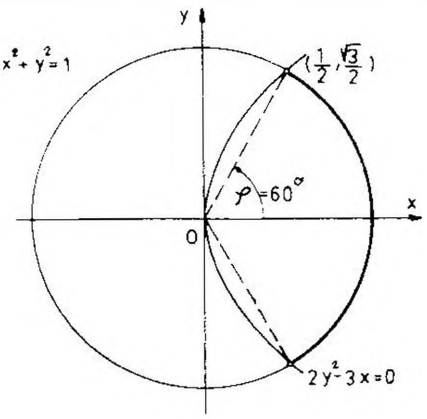
581. a) Nejednačina je ekvivalentna sistemu $x^2 + y^2 = 1$, $y - 2\sqrt{3}\ x^2 > 0$. Rješenje predstavljaju tačke kruga koje leže unutar parabole (sl. 68). Krive se sijeku u tačkama A $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ i B $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Rješenja nejednačine su $60° + k \cdot 360° < \varphi < 120° + k \cdot 360°$.

b) Nejednačina je ekvivalentna sistemu $x^2 + y^2 = 1, 2y^2 - 3x < 0$. Krive linije se sijeku u tačkama $\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Te tačke u trigonometrijskom krugu pripadaju uglovima od $60°$ i $300°$ pa su rješenja nejednačine $-60° + k \cdot 360° < \varphi < 60° + k \cdot 360°$ (sl. 69).

c) Nejednačina je ekvivalentna sistemu $x^2 + y^2 - 1 \geq 2y^2 - 3x < 0$ (sl. 70). Rješenja su $120° + k \cdot 360° < \varphi < 240° + k \cdot 360°$. **d)** Nejednačina je

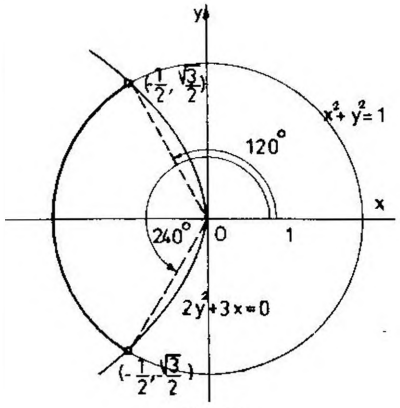


Sl. 68

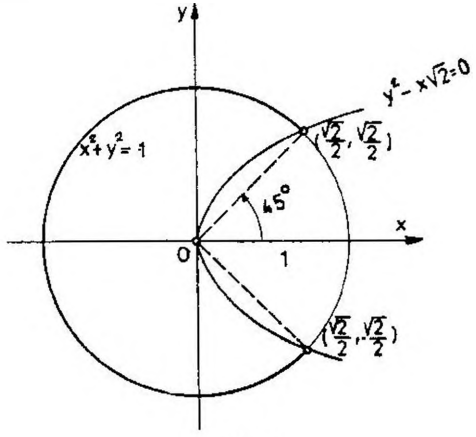


Sl. 69

ekvivalentna sistemu $x^2 + y^2 = 1$, $2y^2 - x\sqrt{2} > 0$. Rješenje predstavljaju koordinate tačaka kružne linije koje leže izvan (sa konveksne strane) parabole; prema tome rješenja zadane nejednačine su $45° + k \cdot 360° < \varphi < 315° + k \cdot 360°$ (sl. 71).



Sl. 70



Sl. 71

582. Trinom postaje nula za $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ i $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$. Slučaj **a)** vodi na relacije $-\infty < \operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$ i $\sqrt{3} < \operatorname{tg} x < +\infty$, a to je za $0 \leqslant x < \frac{\pi}{6}$ i $\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi$. **b)** $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$.

583. Nejednačina nema smisla za one vrijednosti od x za koje postaje

imenilac (nazivnik) nula, a to je za $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ odnosno $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$. Ove vrijednosti x moramo unaprijed isključiti iz eventualnih rješenja. Zadana nejednačina može biti zadovoljena za one vrijednosti od x za koje se brojilac i imenilac razlikuju po predznaku. Razmotrićemo slučaj kada je $\operatorname{tg} x + 1 < 0$ a istovremeno $4\sin^2 x - 3 > 0$. Time se rješavanje zadane nejednačine svodi na rješavanje sistema dviju nejednačina. Prva od njih je zadovoljena za $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$ i $\frac{3\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{4}$. Druga nejednačina je ekvivalentna dvjema nejednačinama, i to: $-1 \leqslant \sin x < -\frac{3}{2}$ i $\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin x \leqslant 1$. Rješenja prve su $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$ a druge $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$. Prema svemu vidimo da je zadana nejednačina zadovoljena za $\frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3}$ i $\frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{3}$. Riješi sam analogno i drugu mogućnost, a to je $\operatorname{tg} x + 1 > 0$ i istovremeno $4\sin^2 x - 3 < 0$.

584. **a)** Nejednačinu pišemo $\frac{3\sin x - 2}{4\sin^2 x - 1} - 1 < 0$ ili, na kraju, $\frac{4\sin^2 x - 3\sin x + 1}{4\sin^2 x - 1} > 0$; brojilac je pozitivan za svako x jer mu je diskriminanta negativna. Prema tome, mora biti i imenilac pozitivan, a to je za $-1 \leqslant \sin x < -\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2} < \sin x \leqslant 1$. Rješenja su $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ i $\frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$.

b) $0 \leqslant x < \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} < x \leqslant 2\pi$.

585. **a)** Množenjem sa $1 - 4\cos^2 x$ dobićemo $(1 - \cos x)(1 + 2\cos x)(1 - 4\cos^2 x) < (1 + \cos x)(1 - 4\cos^2 x)$ i, na kraju, $\cos^2 x(1 - 4\cos^2 x) > 0$. Prvi činilac (faktor) $\cos^2 x > 0$ za svako $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$ pa treba da je i $1 - 4\cos^2 x > 0$ a to je za $-\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$. Rješenja zadane nejednačine su $k\pi + \frac{\pi}{3} < x < k\pi + \frac{2\pi}{3}$ isključivši $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ za koje vrijednosti od x zadana nejednačina prelazi u jednačinu. Gornje vrijednosti od x zaista zadovoljavaju zadanu nejednačinu jer ona

nema smisla samo za vrijednosti od x za koje je $\cos x = \pm\frac{1}{2}$.

b) $k\pi - \frac{\pi}{6} < x < k\pi + \frac{\pi}{6}$.

586. Nejednačina se svodi na oblik $2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)(\cos x - \sin x) > 0$. No $\sin\frac{x}{2} > 0$ za $0 < x < 2\pi$ pa preostaju dvije mogućnosti. Prvi slučaj: istovremeno treba da je $\cos x - \sin x > 0$ i $\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} > 0$. Prva od tih nejednačina postoji za $0 < x < \frac{\pi}{4}$ i $\frac{5\pi}{4} < x < 2\pi$, a druga za $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$. Kako x treba da leži između 0 i 2π, to je $\frac{5\pi}{4} < x < 2\pi$. Drugi slučaj: istovremeno treba da je $\cos x - \sin x < 0$ i $\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} < 0$. Prva od tih nejednačina postoji za $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$, a druga za $0 < x < \frac{\pi}{2}$ i $\frac{5\pi}{2} < x < 4\pi$. Jednu i drugu zadovoljava $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. Prema svemu vidimo da je rješenje zadane jednačine: $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ i $\frac{5\pi}{4} < x < 2\pi$.

587. Nejednačina (1) je ekvivalentna sistemima:

$$\textbf{(a)}\ \begin{cases} \operatorname{tg} x - 1 > 0 \\ \sin x + 1 < 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad \textbf{(b)}\ \begin{cases} \operatorname{tg} x - 1 < 0 \\ \sin x + 1 > 0. \end{cases}$$

Sistem **(a)** je nemoguć dok sistem **(b)** ima rješenje $0 < x < \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{4}$ i $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$. Nejednačina (2) je ekvivalentna sa $-1 \leqslant \sin x < \frac{1}{2}$ i $\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin x \leqslant 1$, a to je za $0 < x < \frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$ i $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$. Rješenje zadanog sistema je: $0 < x < \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{4}$ i $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

588. Iz formula za $\sin 3x$ i $\cos 3x$ nalazimo $\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$, $\cos^3 x =$

588. Uzmemo li $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ i $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ nejednačina prelazi u oblik

$4(\cos^6 x + \sin^6 x) - 3(\cos^4 x + \sin^4 x) > \frac{5}{8}$ tj.

$4[(\cos^2 x + \sin^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^4 x - 3\cos^2 x \sin^4 x] -$
$- 3[(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x] > \frac{5}{8}$

a ovdje, poslije sređivanja, $4\sin^2 x \cos^2 x < \frac{1}{4}$, $\sin^2 2x < \frac{1}{4}$. —

Rješenja: $-\frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{\pi}{12} + k\pi$ i

$\frac{5\pi}{12} + k\pi < x < \frac{7\pi}{12} + k\pi$.

589. Nejednačina nema smisla za $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Za ostale vrijednosti od x ona prelazi u oblik $\sin^2 2x + \frac{3}{2}\sin 2x - 2 > 0$. Ova kvadratna nejednačina je zadovoljena za $\sin 2x < \frac{-3-\sqrt{41}}{4}$ i $\sin 2x > \frac{\sqrt{41}-3}{4}$. Prva od ovih nejednačina ne postoji ni za koje x. Kod druge uzmimo da je $\sin 2x = \frac{\sqrt{41}-3}{4}$ za $2x = a$; $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Tada je

$\frac{a}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} - \frac{a}{2} + k\pi$.

590. Iz relacija $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$ i $\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}$ vidimo da nejednačina nema smisla za one vrijednosti x za koje je $\operatorname{tg}^2 x = 1$ i $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}$. Za sve ostale vrijednosti x lijeva strana prelazi u oblik $\operatorname{tg}^4 x + 2\operatorname{tg}^2 x + 1$, a taj izraz je pozitivan za sve vrijednosti x koje dolaze u obzir.

591. Koristeći se identičnostima $\operatorname{ctg}^2 x - 1 = \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}$, $3\operatorname{ctg}^2 x - 1 = \frac{3\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x}$ i $\operatorname{ctg} 3x \operatorname{tg} 2x - 1 = \frac{\cos 3x \sin 2x - \sin 3x \cos 2x}{\sin 3x \cos 2x} = -\frac{\sin x}{\sin 3x \cos 2x}$ lijeva strana nejednačine prelazi u oblik $-\frac{\sin x(3\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin^4 x \sin 3x}$. Kako je $\sin 3x = \sin x(3\cos^2 x - \sin^2 x)$, nejednačina, na kraju, prelazi u oblik $-\frac{1}{\sin^4 x} \leqslant -1$, a to je očito ispunjeno za svako x.

592. Kako je $\sin\frac{\gamma}{2}=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, lijeva strana nejednakosti prelazi u oblik

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{8}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{8}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2.$$ Dakle je $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\leqslant\frac{1}{8}$ što je i trebalo dokazati.

593. Pođimo od poznate relacije $|\sin x|\leqslant|x|$ gdje znak jednakosti vrijedi samo za $x=0$. Za $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$ je $0\leqslant\cos\varphi\leqslant 1<\frac{\pi}{2}$ i $\sin\cos\varphi<$ $<\cos\varphi$. No $0\leqslant\sin\varphi\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$ i stoga je $\cos\varphi\leqslant\cos\sin\varphi$. Prema svemu je $\sin\cos\varphi<\cos\varphi\leqslant\cos\sin\varphi$ što je i trebalo dokazati.

594. U obrascu $\operatorname{tg}(\vartheta-\varphi)=\frac{\operatorname{tg}\vartheta-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\vartheta\operatorname{tg}\varphi}$ zamijenimo $\operatorname{tg}\vartheta=n\operatorname{tg}\varphi$ pa slijedi:

$\operatorname{tg}^2(\vartheta-\varphi)=\frac{(n-1)^2\operatorname{tg}^2\varphi}{(1+n\operatorname{tg}^2\varphi)^2}=\frac{(n-1)^2}{(\operatorname{ctg}\varphi-n\operatorname{tg}\varphi)^2}$. Treba dokazati da je $(\operatorname{ctg}\varphi+n\operatorname{tg}\varphi)^2\geqslant 4n$. Zaista ova relacija prelazi u $(1-n\operatorname{tg}^2\varphi)^2\geqslant$ $\geqslant 4n\operatorname{tg}^2\varphi$, a ovo vodi do očite nejednakosti $(1-n\operatorname{tg}^2\varphi)^2\geqslant 0$.

595. Pomoću formule $\cos\varphi=\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}$ nejednakost prelazi u oblik

$\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}>\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}+\sin\varphi}{\sin\varphi}$. U intervalu $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ je $\sin\varphi>0$, pa množenjem sa $\sin\varphi$ nejednačina prelazi u ekvivalentnu nejednačinu $2\cos^2\frac{\varphi}{2}>\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}+\sin\varphi$ ili $1>\sin\varphi$ što svakako postoji u posmatranom intervalu.

13. Rješavanje pravouglog trougla (pravokutnog trokuta) pomoću logaritama

596. **a)** $\beta = 90° - \alpha = 67°22'48''$, $b = a \operatorname{ctg} \alpha = 12$, $c = \dfrac{a}{\sin \alpha} = 13$,

$P = \dfrac{a^2}{2} \operatorname{ctg} \alpha = 30$

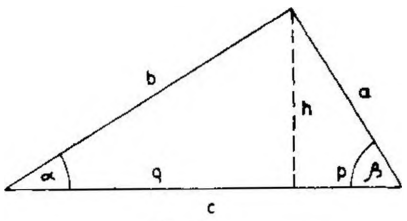
b) $\alpha = 90° - \beta = 16°15'37''$, $a = b \operatorname{ctg} \beta = 7$, $c = \dfrac{b}{\sin \beta} = 25$,

$P = \dfrac{b^2}{2} \operatorname{ctg} \beta = 84$, (sl. 72)

c) $\alpha = 10°23'20''$, $b = a \operatorname{tg} \beta = 60$,

$c = \dfrac{a}{\cos \beta} = 61$, $P = \dfrac{a^2}{2} \operatorname{tg} \beta = 330$

d) $a = 20$,
$c = 101$, $P = 990$.



Sl. 72

597. **a)** $\beta = 61°55'39''$, $a = c \sin \alpha = 8$, $b = c \cos \alpha = 15$, $P = \dfrac{c^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha =$

$= \dfrac{c^2 \sin 2\alpha}{4} = 60$ **b)** $\alpha = 43°36'10''$, $b = c \sin \beta = 21$, $a = c \cos \beta = 20$,

$P = \dfrac{c^2}{2} \sin \beta \cos \beta = 210$ **c)** $\beta = 75°45'$, $a = 16$, $b = 63$, $P = 504$

d) $a = 36$, $b = 77$, $P = 1386$.

598. **a)** $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{a}{b}$; odavde dobijemo $\alpha = 36°52'11''$, $\beta = 53°7'48''$,

$c = \dfrac{a}{\sin \alpha} = 5$, $P = \dfrac{ab}{2} = 6$ **b)** $\alpha = 30°30'37''$, $c = 65$, $P = 924$

c) $\sin \alpha = \dfrac{a}{c}$, $\alpha = 41°6'46''$, $\beta = 48°53'16''$, $b = \sqrt{(c-a)(c+a)} = 55$,

$P = \dfrac{1}{2} a \sqrt{(c-a)(c+a)} = 1320$ **d)** $\alpha = 31°53'29''$, $a = 28$, $P = 630$.

599. **a)** Imamo: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$, $\alpha=36°52'11''$. Stranice a i b možemo naći iz jednačine $a^2+b^2=100$ i zadane proporcije; možemo poći i od relacija $a=c\sin\alpha=6$, $b=c\cos\alpha=8$, $P=24$. poći

b) $\alpha=22°37'16''$, $b=24$, $c=26$, $P=120$ **c)** $\alpha=16°15'37''$, $a=14$, $c=50$, $P=336$ **d)** $a=32$, $b=60$, $\alpha=28°4'22''$, $P=960$. P = 960

600. **a)** $b=\frac{h}{\sin\alpha}=20$, $a=\frac{h}{\cos\alpha}=15$, $c=\frac{ab}{h}=25$, $P=\frac{ab}{2}=\frac{h^2}{\sin 2\alpha}=150$ 150

h^2/sin 2 alfa

b) $a=3$, $b=4$, $c=5$, $P=6$.

601. **a)** $a=\frac{p}{\sin\alpha}=15$, $b=\frac{p}{\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}=20$, $c=\frac{p}{\sin^2\alpha}=25$,

$P=\frac{p^2}{2\sin^2\alpha\operatorname{tg}\alpha}=150$ **b)** $a=7$, $b=24$, $c=25$, $P=84$ 84

c) $a=8$, $b=15$, $c=17$, $P=60$.

602. **a)** $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\frac{p}{q}}=\frac{3}{4}$, $\alpha=36°52'11''$, $a=\frac{h}{\cos\alpha}=6$, $b=\frac{h}{\sin\alpha}=8$,

$c=\frac{h}{\sin\alpha\cos\alpha}=10$, $P=\frac{h^2}{\sin 2\alpha}=24$ **b)** $\alpha=22°37'12''$,

$a=5$, $b=12$, $c=13$, $P=30$.

603. **a)** $a=\sqrt{2P\operatorname{tg}\alpha}=20$, $b=\sqrt{\frac{2P}{\operatorname{tg}\alpha}}=21$, $c=2\sqrt{\frac{P}{\sin 2\alpha}}=29$

b) $a=33$, $b=56$, $c=65$.

604. **a)** $b=\frac{2P}{a}=24$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a^2}{2P}$, $\alpha=16°15'37''$, $c=\frac{\sqrt{a^4+4P^2}}{a}=25$ 25

b) $a=65$, $c=97$, $\alpha=42°4'30''$.

605. **a)** $c=\frac{k}{2\sin^2\frac{\beta}{2}}$, $a=\frac{k\cos\beta}{2\sin^2\frac{\beta}{2}}$, $b=k\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$, $P=\frac{k^2\cos\beta\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{4\sin^2\frac{\beta}{2}}$

b) $c=17$, $a=8$, $b=15$, $P=60$ **c)** $c=\frac{k}{2\sin^2\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}$,

$a=\frac{k\sin\alpha}{2\sin^2\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}$, $b=\frac{k\cos\alpha}{2\sin^2\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}$, $P=\frac{k^2\sin 2\alpha}{16\sin_4\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}$

d) $c=73$, $a=48$, $b=55$, $P=1\,320$.

599. **a)** Imamo: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{3}{4}$, $\alpha = 36°52'11''$. Stranice a i b možemo naći iz jednačine $a^2 + b^2 = 100$ i zadane proporcije; možemo poći i od relacija $a = c\sin\alpha = 6$, $b = c\cos\alpha = 8$, $P = 24$.
b) $\alpha = 22°37'16''$, $b = 24$, $c = 26$, $P = 120$ **c)** $\alpha = 16°15'37''$, $a = 14$, $c = 50$, $P = 336$ **d)** $a = 32$, $b = 60$, $\alpha = 28°4'22''$, $P = 960$.

600. **a)** $b = \frac{h}{\sin\alpha} = 20$, $a = \frac{h}{\cos\alpha} = 15$, $c = \frac{ab}{h} = 25$, $P = \frac{ab}{2} = \frac{h^2}{\sin 2\alpha} = 150$
b) $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $P = 6$.

601. **a)** $a = \frac{p}{\sin\alpha} = 15$, $b = \frac{p}{\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha} = 20$, $c = \frac{p}{\sin^2\alpha} = 25$,
$P = \frac{p^2}{2\sin^2\alpha\operatorname{tg}\alpha} = 150$ **b)** $a = 7$, $b = 24$, $c = 25$, $P = 84$
c) $a = 8$, $b = 15$, $c = 17$, $P = 60$.

602. **a)** $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{3}{4}$, $\alpha = 36°52'11''$, $a = \frac{h}{\cos\alpha} = 6$, $b = \frac{h}{\sin\alpha} = 8$,
$c = \frac{h}{\sin\alpha\cos\alpha} = 10$, $P = \frac{h^2}{\sin 2\alpha} = 24$ **b)** $\alpha = 22°37'12''$,
$a = 5$, $b = 12$, $c = 13$, $P = 30$.

603. **a)** $a = \sqrt{2P\operatorname{tg}\alpha} = 20$, $b = \sqrt{\frac{2P}{\operatorname{tg}\alpha}} = 21$, $c = 2\sqrt{\frac{P}{\sin 2\alpha}} = 29$
b) $a = 33$, $b = 56$, $c = 65$.

604. **a)** $b = \frac{2P}{a} = 24$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a^2}{2P}$, $\alpha = 16°15'37''$, $c = \frac{\sqrt{a^4 + 4P^2}}{a} = 25$
b) $a = 65$, $c = 97$, $\alpha = 42°4'30''$.

605. **a)** $c = \frac{k}{2\sin^2\frac{\beta}{2}}$, $a = \frac{k\cos\beta}{2\sin^2\frac{\beta}{2}}$, $b = k\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$, $P = \frac{k^2\cos\beta\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{4\sin^2\frac{\beta}{2}}$
b) $c = 17$, $a = 8$, $b = 15$, $P = 60$ **c)** $c = \frac{k}{2\sin^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}$,
$a = \frac{k\sin\alpha}{2\sin^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}$, $b = \frac{k\cos\alpha}{2\sin^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}$, $P = \frac{k^2\sin 2\alpha}{16\sin_4\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}$
d) $c = 73$, $a = 48$, $b = 55$, $P = 1\,320$.

606. **a)** $c=26,\ b=24,\ a=10,\ P=120$ **b)** $c=65,\ b=56,\ a=33,\ P=924$

607. **a)** $a=\dfrac{k\sin\alpha}{\sqrt{2}\cos(\alpha-45^\circ)},\ b=\dfrac{k\cos\alpha}{\sqrt{2}\cos(\alpha-45^\circ)},\ c=\dfrac{k}{\sqrt{2}\cos(\alpha-45^\circ)},$

$P=\dfrac{k^2\sin 2\alpha}{8\cos^2(\alpha-45^\circ)}$ **b)** $a=7,\ b=24,\ c=25,\ P=84$

c) $a=\dfrac{k\cos\beta}{\sqrt{2}\cos(\beta-45^\circ)},\ b=\dfrac{k\sin\beta}{\sqrt{2}\cos(\beta-45^\circ)},\ c=\dfrac{k}{\sqrt{2}\cos(\beta-45^\circ)},$

$P=\dfrac{k^2\sin 2\beta}{8\cos^2(\beta-45^\circ)}$ **d)** $a=20,\ b=21,\ c=29,\ P=210.$

608. **a)** $b=\dfrac{23\cos\alpha}{\sqrt{2}\sin(45^\circ-\alpha)}=35,\ a=\dfrac{23\sin\alpha}{\sqrt{2}\sin(45^\circ-\alpha)}=12,$

$c=\dfrac{23}{\sqrt{2}\sin(45^\circ-\alpha)}=37,\ P=\dfrac{23^2\sin 2\alpha}{8\sin^2(45^\circ-\alpha)}=210$

b) $a=55,\ b=48,\ c=73,\ P=1\,320.$

609. $c=\dfrac{2s}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{s}{\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)},\ a=\dfrac{s\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)},$

$b=\dfrac{s\cos\alpha}{\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)},\ P=\dfrac{s^2\sin 2\alpha}{8\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)}.$

610. $c=\dfrac{k}{\sin\alpha+\cos\alpha-1}=\dfrac{k}{2\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)},\ a=c\sin\alpha,$

$b=c\cos\alpha,\ P=\dfrac{c^2\sin 2\alpha}{4}$ itd.

611. **a)** $a=\dfrac{k}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}},\ b=\dfrac{k\operatorname{ctg}\alpha}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}},\ c=\dfrac{k}{2\sin\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}},$

$P=\dfrac{k^2\operatorname{ctg}\alpha}{8\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$ **b)** $a=15,\ b=20,\ c=25,\ P=150.$

612. Za aritmetičku i geometrijsku sredinu dva broja važi $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}>$ $>\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}$; odavde je $\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2}>\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}$ ili $\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}>2\sin\alpha\sin\beta$. Kako je $\sin\alpha=\frac{a}{c}$ a $\sin\beta=\frac{b}{c}$, zamjenom odmah izlazi tražena relacija.

613. Iz $n^2+(n+1)^2=(n+2)^2$ izlazi $n=3$ pa su stranice trougla 3, 4, 5. Prema tome je $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, pa zamjenom u datoj relaciji slijedi traženi dokaz.

614. **a)** $a=2b\cos\beta=6$, $\alpha=90°-\beta=36°52'12''$, $P=\frac{b^2\sin 2\beta}{2}=12$

b) $a=2b\sin\frac{\alpha}{2}=14$, $\beta=90°-\frac{\alpha}{2}=73°44'23''$, $P=\frac{b^2\sin\alpha}{2}=168$.

615. **a)** $b=\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=29$, $P=\frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=420$

b) $b=\frac{a}{2\cos\beta}=85$, $P=\frac{a^2}{4}\operatorname{tg}\beta=2772$.

616. **a)** $\cos\beta=\frac{a}{2b}$, $\beta=61°55'39''$, $P=\frac{ab}{2}\sin\beta=\frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{4}=120$

b) $\beta=53°7'50''$, $P=48$.

617. **a)** $b=\sqrt{\frac{2P}{\sin\alpha}}$, $a=2\sqrt{P\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, $\beta=90°-\frac{\alpha}{2}$ **b)** $a=2\sqrt{\frac{P}{\operatorname{tg}\beta}}$, $b=\sqrt{\frac{2P}{\sin 2\beta}}$, $\alpha=180°-2\beta$ **c)** $a=2h\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $b=\frac{h}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, $P=h^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\beta=90°-\frac{\alpha}{2}$ **d)** $a=2h\operatorname{ctg}\beta$, $b=\frac{h}{\sin\beta}$, $P=h^2\operatorname{ctg}\beta$, $\alpha=180°-2\beta$ **e)** $a=\frac{2P}{h}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{h^2}{P}$, $b=\frac{\sqrt{P^2+h^4}}{h}$ ili $b=\frac{h}{\sin\beta}$ **f)** $\operatorname{tg}\beta=\frac{4P}{a^2}$, $b=\frac{\sqrt{a^4+16P^2}}{2a}$ ili $b=\frac{a}{2\cos\beta}$

g) $b=\dfrac{k}{4\cos^2\dfrac{\beta}{2}}$, $a=\dfrac{k\cos\beta}{2\cos^2\dfrac{\beta}{2}}$, $P=\dfrac{k^2\sin 2\beta}{32\cos^4\dfrac{\beta}{2}}$

h) $b=\dfrac{k}{4\sin^2\left(45^\circ+\dfrac{\alpha}{4}\right)}$, $a=\dfrac{k\sin\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin^2\left(45^\circ+\dfrac{\alpha}{4}\right)}$, $P=\dfrac{k^2\sin\alpha}{32\cos^4\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{4}\right)}$

i) $a=\dfrac{2k}{2+\operatorname{tg}\beta}$, $h=\dfrac{k\operatorname{tg}\beta}{2+\operatorname{tg}\beta}$, $b=\dfrac{k}{\sin\beta+2\cos\beta}$, $P=\dfrac{k^2\operatorname{tg}\beta}{(2+\operatorname{tg}\beta)^2}$.

618. $h_b=2h\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

619. a) $h_b=\sqrt[3]{2P\sin 2\beta}$ b) $h_b=\sqrt[3]{2P\sin\alpha}$.

620. a) $a_n=2R\sin\dfrac{180^\circ}{n}$, $a_5=2R\sin 36^\circ$, $r_n=R\cos\dfrac{180^\circ}{n}$, $r_5=R\cos 36^\circ$,

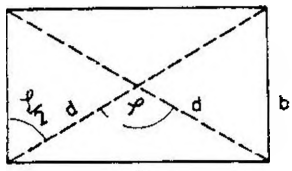
$P_n=\dfrac{nR^2}{2}\sin\dfrac{360^\circ}{n}$, $P_5=\dfrac{5R^2}{2}\sin 72^\circ$

b) $R=\dfrac{a_{10}}{2\sin 18^\circ}$, $r_{10}=\dfrac{a_{10}}{2}\operatorname{ctg}18^\circ$, $P_{10}=\dfrac{5}{2}a^2_{10}\operatorname{ctg}18^\circ$

c) $R=\dfrac{r_{12}}{\cos 15^\circ}$, $a_{12}=2r_{12}\operatorname{tg}15^\circ$, $P_{12}=12r^2_{12}\operatorname{tg}15^\circ$

d) $R=\sqrt{\dfrac{2P_{15}}{15\sin 24^\circ}}$, $a_{15}=2\sqrt{\dfrac{P_{15}\operatorname{tg}12^\circ}{15}}$, $r_{15}=\sqrt{\dfrac{P_{15}}{15}}\operatorname{ctg}12^\circ$.

621. $R=\dfrac{a}{2\sin\dfrac{180}{n}}$, $r=\dfrac{a}{2\operatorname{tg}\dfrac{180}{n}}$, $P=\pi(R^2-r^2)=\dfrac{a^2\pi}{4}$.



Sl. 73

622. $b=a\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}=48$ (sl. 73).

623. Stranice su $a=d\sin\dfrac{\varphi}{2}=42$,

$b=d\cos\dfrac{\varphi}{2}=40$.

624. Iz jednačina $ab = P$ i $\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ dobijamo $a = \sqrt{P \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}$, $b = \sqrt{\frac{P}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}}$.

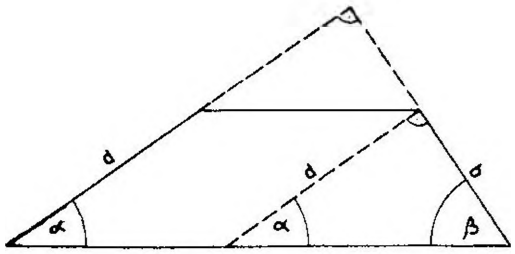
625. Iz jednačina $2a + 2b = 2s$ i $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{a}{b}$ dobićemo $a = \frac{s \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}$,

$$b = \frac{s}{1 + \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}, \quad P = ab = \frac{s^2 \sin\varphi}{4\cos^2\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)}.$$

626. Iz $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{d}$ dobijamo $\alpha = 50°6'54''$.

627. Ako je a stranica romba (nacrtaj sliku!) onda imamo za površinu $P = a^2 \sin\alpha = 2ar$ ili $P = \frac{4r^2}{\sin\alpha}$.

628. Iz relacije $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{d}$ dobijamo (sl. 74) $\alpha = 30°30'35''$ i $\beta = 59°29'25''$.



Sl. 74

629. Visina trapeza (nacrtaj sliku!) je $h = \frac{a-c}{2} \operatorname{tg}\alpha$ pa je $P = \frac{a^2 - c^2}{4} \operatorname{tg}\alpha$

a $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4P}{a^2 - c^2} = \sqrt{3}$. Prema tome je $\alpha = 60°$, $b = \frac{a-c}{2\cos\alpha} = 4$.

630. Visina iznosi 11 m.

631. Ugao iznosi $25°3'27''$.

632. 14 m.

633. Tražene udaljenosti su 194 m i 144 m.

634. Visina iznosi 39,1 m.

635. $V = (\sqrt{P\cos\alpha})^3$.

636. **a)** $P=\dfrac{2a^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$, $V=\dfrac{a^3}{6}\operatorname{tg}\alpha$ **b)** $P=\dfrac{2a^2\sin^2\left(45^\circ-\dfrac{\beta}{4}\right)}{\sin\dfrac{\beta}{2}}$,

$V=\dfrac{a^3}{6}\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}$ **c)** $P=4h^2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$, $V=\dfrac{4h^3\operatorname{ctg}^2\alpha}{3}$

d) $P=8v^2\cos\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$, $V=\dfrac{4v^3\sin\alpha\cos^2\alpha}{3}$ **e)** $V=\dfrac{2b^3\sin\gamma\cos^2\gamma}{3}$.

637. $V=\dfrac{b^3}{6}\sin\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$.

638. Površina baze $ab=\dfrac{3V}{s\sin\alpha}=2\left(\dfrac{d}{2}\right)^2\sin\varphi$, gdje je d dijagonala baze a φ ugao između dijagonala; $d=2s\cos\alpha$; iz jednačine $\dfrac{3V}{s\sin\alpha}=$ $=2s^2\cos^2\alpha\sin\varphi$ dobijamo $\sin\varphi=\dfrac{3V}{2s^3\sin\alpha\cos^2\alpha}$. Ako se zna $\sin\varphi$ lako je naći $\sin\dfrac{\varphi}{2}$ i $\cos\dfrac{\varphi}{2}$; $a=2s\cos\alpha\sin\dfrac{\varphi}{2}$, $b=2s\cos\alpha\cos\dfrac{\varphi}{2}$.

639. **a)** $\dfrac{\pi V}{4}$ **b)** $\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{3\sqrt{2V}}{\operatorname{tg}\alpha}}$. **640.** $V=a\pi r^2\sin\alpha$.

641. $V=\dfrac{\pi}{4}\sqrt{\dfrac{P^3}{\sin\alpha}}$.

642. **a)** $P=\dfrac{2r^2\pi\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$, $V=\dfrac{r^3\pi\operatorname{tg}\alpha}{3}$ **b)** $P=\dfrac{2r^2\pi\sin^2\left(45^\circ+\dfrac{\beta}{4}\right)}{\sin\dfrac{\beta}{2}}$,

$V=\dfrac{r^3\pi\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}}{3}$ **c)** $P=2\pi s^2\cos\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$, $V=\dfrac{s^3\pi\sin\alpha\cos^2\alpha}{3}$

d) $P=2s^2\sin\dfrac{\beta}{2}\sin^2\left(45^\circ+\dfrac{\beta}{4}\right)$, $V=\dfrac{\pi s^3}{3}\sin^2\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}$

e) $V=\dfrac{h^3\pi\operatorname{ctg}^2\alpha}{3}$, $P=h^2\pi\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$

f) $P=\dfrac{2h^2\pi\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\sin^2\left(45^\circ+\dfrac{\beta}{4}\right)}{\cos\dfrac{\beta}{2}}$, $V=\dfrac{h^3\pi\operatorname{tg}^2\dfrac{\beta}{2}}{3}$.

643. Iz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3V}{r^3\pi}$ u specijalnom slučaju je $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ a odavde $\alpha = 53°7'48''$.

644. Površina kupe je $\frac{2\pi P \sin^2\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ a zapremina $\frac{\pi}{3}\sqrt{P^3 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

645. $M = \sqrt[3]{\frac{9\pi V^2}{\sin^2\alpha\cos\alpha}}$.

646. Tražena kateta je $\sqrt[3]{\frac{3V\cos\alpha}{\pi\sin^2\alpha}}$.

647. **a)** $V = \frac{r^3\pi\sin(\alpha+\beta)}{3\cos\alpha\cos\beta}$ **b)** $V = \frac{r^3\pi\sin(\alpha-\beta)}{3\cos\alpha\cos\beta}$.

648. $V = \frac{(3M^2 + \pi^2 s^4\cos^2\alpha)\sin\alpha}{12\pi s}$.

649. Traženi poluprečnik (polumjer) je $\sqrt[3]{\frac{(R^3 - r^3)\operatorname{tg}\alpha}{4}}$.

650. $s = \frac{R}{\cos\alpha}\left(1 - \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

651. Iz jednačina $R^2\pi = 3r^2\pi$, $\pi s(R+r) = 4r^2\pi$ je $R = r\sqrt{3}$ i $s = 2r(\sqrt{3}-1)$ pa je $\cos\alpha = \frac{R-r}{s} = \frac{1}{2}$ tj. $\alpha = 60°$.

14. Rješavanje kosouglog trougla (kosokutnog trokuta)

652. **a)** Sinusova teorema daje: $\sin\alpha = \frac{a\sin\beta}{b}$; odavde ćemo naći $\alpha = 27°47'45''$, $\gamma = 180° - (\alpha+\beta) = 92°12'15''$, $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} = 15$, $P = \frac{ac\sin\beta}{2} = \frac{105\sqrt{3}}{4}$ **b)** $\alpha = 27°47'45''$, $\beta = 32°12'15''$, $a = 7$, $P = 14\sqrt{3}$ **c)** $\beta = 28°4'21''$, $\gamma = 8°47'51''$, $c = 13$, $P = 156$ **d)** $\beta = 61°55'39''$, $\gamma = 22°37'12''$ $c = 17$, $P = 330$.

653. **a)** Kosinusova teorema daje $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$; odavde je $c = 7$ **b)** $c = 5$.

654. **a)** Teorema o tangensima $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{ct}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$ daje $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{11}$; odavde je $\frac{\alpha-\beta}{2} = 38°12'49''$, a kako je $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{180°-\gamma}{2} = 60°$, to imamo sistem dviju jednačina iz kojih slijedi $\alpha = 98°12'49''$, $\beta = 21°47'11''$ **b)** $\beta = 67°22'48''$, $\gamma = 38°52'48''$ **c)** $\alpha = 112°37'12''$, $\gamma = 14°15'$.

655. **a)** Iz teoreme o tangensima je $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{3}{77}\operatorname{ctg} 9°27'45''$; odavde ćemo naći $\frac{\alpha-\beta}{2}$. Iz ove jednačine zajedno sa jednačinom $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}$ dobićemo $\alpha = 93°41'42''$ i $\beta = 67°22'48''$, $c = 13$, $P = 240$ **b)** $b = 37$, $\alpha = 107°56'43''$, $\gamma = 18°55'29''$, $P = 264$ **c)** $a = 52$, $\beta = 30°30'37''$, $\gamma = 22°37'12''$, $P = 330$ **d)** $c = 19$, $\alpha = 143°7'48''$, $\beta = 18°55'29''$, $P = 114$.

656. Iz kosinusove teoreme $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ nalazimo $a = 7$; iz sinusove teoreme je $\sin\alpha = \frac{a\sin\gamma}{c} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$ i $\sin\beta = \frac{b\sin\gamma}{c} = \frac{3}{5}$.

657. **a)** $\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 81°47'12''$, $b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} = 5$, $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = 7$,

$P = \frac{ab \sin \gamma}{2} = 10\sqrt{3}$ **b)** $\beta = 46°49'35''$, $b = 16$, $c = 19$,

$P = 20\sqrt{3}$ **c)** $\beta = 61°55'39''$, $a = 28$, $c = 17$, $P = 210$

d) $a = 51$, $b = 35$, $\gamma = 28°4'21''$, $P = 420$.

658. **a)** Kosinusova teorema daje $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}$, $\gamma = 60°$.

$\alpha = 98°12'48''$ **b)** $\gamma = 120°$, $\alpha = 21°47'12''$

c) $\gamma = 45°$, $\alpha = 53°7'48''$ **d)** $\gamma = 135°$, $\alpha = 36°52'12''$.

659. **a)** Umjesto kosinusove teoreme možemo se poslužiti i obrascem $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = 2$; odavde je $\alpha = 126°52'12''$, $\beta = 28°4'21''$

b) $\alpha = 83°16'2''$, $\beta = 53°7'48''$ **c)** $\alpha = 78°11'16''$, $\beta = 106°15'37''$.

660. **a)** Iz $a : b : c = 5 : 7 : 8$ je $a = 5k$, $b = 7k$, $c = 8k$, $\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$, $\beta = 60°$ **b)** $\cos \gamma = -\frac{1}{2}$, $\gamma = 120°$.

661. **a)** $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 0$, $\gamma = 90°$ **b)** $\cos \gamma = \frac{1}{2}$ **c)** $\cos \gamma = -\frac{1}{2}$.

662. **a)** Primijeni kosinusovu teoremu $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$, $c = 15$

b) $a = 33$ **c)** $c_1 = 8$, $c_2 = 7$ **d)** $c_1 = 23$, $c_2 = 22$ **e)** $b = 1$.

663. **a)** Neka je $\gamma = 90°$; tada $a : c = \sin \alpha : \sin 90°$ daje $a = c \sin \alpha$, $b = c \sin \beta$

b) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 90°$ prelazi u Pitagorinu teoremu $c^2 = a^2 + b^2$.

664. **a)** Iz $a : b = \sin 2\beta : \sin \beta$ nađi $\cos \beta$ pa zatim primijeni kosinusovu teoremu. $c = 24$ **b)** $c = 7$.

665. **a)** Sinusova teorema daje $\cos \beta = \frac{3}{4}$; kosinusova teorema $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$ daje $c_1 = 10$ i $c_2 = 8$. U obzir dolazi samo $c = 10$ (zašto?), $\alpha = 82°49'10''$, $P = 15\sqrt{7}$ **b)** $a = 7$, $\gamma = 48°11'23''$, $P = 14\sqrt{5}$.

666. **a)** Iz $a:b=\sin\alpha:\sin\beta$ izlazi $\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{\sqrt{6}}{3}$; $\sin\alpha=\sin 2\beta=2\sin\beta\cos\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\sin\gamma=\sin 3\beta=3\sin\beta-4\sin^3\beta=\frac{\sqrt{6}}{9}$, $\cos\gamma=\frac{5\sqrt{3}}{9}$; kosinusova teorema daje $c=1$

b) $c=5$.

667. **a)** $b:c=\sin\beta:\sin\gamma$ daje $9:7=\sin\beta:\sin 3\beta$; odavde je $\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{3}$, nadalje je $\cos\beta=\frac{2}{3}$, $b^2=c^2+a^2-2ac\cos\beta$ daje $a=12$, $\beta=48°11'23''$

b) $a=6$, $\beta=41°24'34''$ **c)** $b=70$, $\gamma=44°24'51''$

d) $a=15$, $\gamma=33°33'26''$.

668. **a)** Primijeni sinusovu teoremu a zatim kosinusovu; izlazi $b=16$

b) $a=16$ **c)** $b=8$ **d)** $b=4$.

669. Iz sinusove teoreme naći ćemo $\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}$; nadalje je $\cos\alpha=\pm\frac{1}{7}$, $\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ itd.

670. **a)** Iz $\sin 2\beta:\sin\beta=11:8$ je $\cos\beta=\frac{11}{16}$, $\beta=46°34'5''$ **b)** $\sin\gamma=\frac{\sqrt{15}}{8}$, $\gamma=28°57'18''$.

671. **a)** Iz zadane proporcije slijedi $\frac{a+b}{a-b}=\frac{3+2}{3-2}$, a kako je $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$, nalazimo $\frac{\alpha-\beta}{2}$ itd.; $\alpha=82°49'10''$, $\beta=41°24'34''$

b) $\alpha=133°36'10''$, $\gamma=9°31'38''$ **c)** $\alpha=112°37'12''$, $\beta=53°7'48''$

d) $\beta=28°4'21''$, $\gamma=25°3'27''$.

672. Ako je $\alpha=2\beta$ onda je $\gamma=180°-3\beta$, pa je prema sinusovoj teoremi $\sin\beta:\sin 3\beta=4:1$. Uzmemo li $\sin 3\beta=3\sin\beta-4\sin^3\beta$ dobićemo $\sin\beta=\frac{\sqrt{11}}{4}$, $\sin\alpha=2\sin\beta\cos\beta=\frac{\sqrt{11}}{8}$, $\sin\gamma=\sin 3\beta=\frac{\sqrt{11}}{16}$. Iz sinusove teoreme je $c=\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}=2$, $b=8$.

673. Primijeni sinusovu a zatim kosinusovu teoremu; $a_1=\sqrt{6}$, $b_1=2$; $a_2=\frac{\sqrt{6}}{2}$, $b=1$.

674. Iz $\sin 2\beta:\sin 3\beta=12:7$ nalazimo $\cos\beta=\frac{2}{3}$; drugo rješenje nema smisla. Iz jednačina $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$ i $a:c=12:7$ izlazi $a=4$, $c=\frac{7}{3}$.

675. **a)** Sinusova teorema daje $\cos\beta=\frac{2}{3}$. Kosinusova teorema vodi na jednačinu $b^2=a^2+49-\frac{28}{3}a$ koja zajedno sa datom proporcijom daje $a=12$, $b=9$; $\beta=48°11'23''$. **b)** $a=20$, $b=16$, $\beta=51°19'4''$ **c)** $b=28$, $c=16$, $\gamma=28°57'18''$. Drugo rješenje nađi sâm.

676. Iz teoreme o tangensima $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a-b}{a-b}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ dobićemo $\frac{\alpha-\beta}{2}$, a kako je $\frac{\alpha+\beta}{2}=90°-\frac{\gamma}{2}$, iz tih jednačina nalazimo $\alpha=143°7'48''$ i $\beta=22°37'12''$. Iz molvajdove jednačine $\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$ dobivamo $a+b$ a odavde i iz date proporcije izlazi $a=78$, $b=50$; na kraju slijedi $P=480$.

677. **a)** Iz jednačine $a-b=5$ i $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ izlazi $b=3$, $a=8$
b) $a=7$, $b=8$ **c)** $b=7$, $c=13$ ili obrnuto **d)** $a=26$, $b=2$
e) $b=7$, $c=2$ **f)** $b=7$, $a=17$.

678. **a)** Primijeni kosinusovu teoremu za stranicu c; $b=1$, $c=5$
b) $b=2$, $c=7$ **c)** $b=7$, $c=13$ **d)** $a=8\sqrt{3}$, $c=13$.

679. **a)** Primijeni kosinusovu teoremu. Time dolazimo do sistema jednačina $a^2-ab+b^2=49$, $a^2+2b^2=82$ iz kojih slijedi homogena jednačina $33a^2-82ab-16b^2=0$; iz nje dobijemo $a=\frac{8}{3}b$; $a=8$, $b=3$
b) $a=8$, $b=5$ **c)** $a=3$, $b=5$ **d)** $b=8$, $c=7$.

680. Iz relacije $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ i zadanih veličina slijedi jednačina $ab=15$. Iz ove jednačine i $a^2+b^2=34$ nalazimo $a=5$, $b=3$ ili obrnuto; $\sin\alpha=\frac{a\sin\gamma}{c}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$, $\sin\beta=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

681. Neka su stranice trougla a, $a+1$, $a+2$ a α ugao naspram stranice a; tada je 2α ugao nasuprot stranice $a+2$, pa imamo $a:(a+2)=\sin\alpha:\sin 2\alpha$ i $a^2=(a+1)^2+(a+2)^2-2(a+1)(a+2)\cos\alpha$. Iz tih jednačina izlazi $\cos\alpha=\frac{a+2}{2a}$ i $a=4$. Stranice trougla su 4, 5, 6 a uglovi $\alpha=41°24'37''$, $2\alpha=82°49'14''$ itd.

682. Označimo stranice sa: $2a+1, 2a+3, 2a+5$; tada je $(2a+5)^2=(2a+1)^2+(2a+3)^2-2(2a+1)(2a+3)\cos\gamma$. Odavde je $a=1$, pa su stranice trougla 3, 5 i 7; najmanji ugao uznosi $21°47'11''$.

683. **a)** $\sin\beta=\frac{b}{2R}$; odavde je $\beta=59°29'25''$, $c=2R\sin\gamma=15$, $a=13$, $P=84$ **b)** $b=52$, $c=41$, $\alpha=12°40'49''$, $P=126$.

684. **a)** $R=\frac{b}{2\sin\beta}$, pa je $\frac{b}{2\sin\beta}:b=7\sqrt{3}:9$; odavde je $\sin\beta=\frac{3\sqrt{3}}{14}$, $\beta=21°47'11''$, $\alpha=98°12'49''$ **b)** $\alpha=22°37'12''$.

685. **a)** $s-a=\frac{b+c-a}{2}$; uzmemo li $a=2R\sin\alpha$ i slično za ostale stranice, dobijemo $R(\sin\beta+\sin\gamma-\sin\alpha)=1$. Odavde je $R=\frac{1}{\sin\beta+\sin\gamma-\sin\alpha}=$

$=\frac{1}{4\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$. Prema tome je $a=2R\sin\alpha=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=$

$=15$; b možemo odrediti pomoću obrasca $b=2R\sin\beta$ ili sinusove teoreme $b=\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}=13$; $c=4$. **b)** $a=17$, $b=10$, $c=9$

c) $a=21$, $b=20$, $c=13$ **d)** $a=53$, $b=35$, $c=24$.

686. Iz teoreme o tangensima dobijemo $\gamma=76°25'36''$, $\alpha=81°47'12''$, $\beta=21°47''12''$, $c=55$ **b)** $\alpha=98°12'48''$, $\beta=38°12'48''$, $c=39$

c) $a=16$, $\alpha=16°25'35''$, $\beta=141°47'12''$

d) $b=15$, $\alpha=147°47'45''$ $\beta=4°24'30''$.

687. Iz relacije $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$ dobijemo $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=4\sqrt{3}$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\sqrt{3}}{12}$;

$\cos\gamma=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}=\frac{141}{147}$; $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma=256$, $c=16$.

688. **a)** Tangensova teorema vodi na jednačinu $\frac{7}{2}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\gamma}$ odakle je $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$. Iz toga slijedi $\cos\gamma=\frac{7}{9}$ pa možemo primijeniti kosinusovu teoremu; $c=6$ **b)** $c=4$ **c)** $a=2$.

689. **a)** Tangensova teorema daje $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{15}$, $\gamma=33°12'11''$. Iz kosinusove teoreme dobijemo: $c=28$, $P=198\sqrt{5}$
b) $c=17$, $\gamma=38°22'34''$, $P=341.55$.

690. **a)** Iz date proporcije slijedi $\frac{a-b}{a-b}=49$; primjenom teoreme o tangensima dobijemo $\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{99}$ a odavde $\cos\gamma=\frac{49}{50}$. Iz kosinusove teoreme i zadane proporcije izlazi $a=50$, $b=48$, $\gamma=11°28'30''$, $\alpha=95°44'21''$, $P=72\sqrt{11}$ **b)** $a=64$, $b=60$, $\alpha=82°49'10''$, $\beta=68°27'28''$, $P=\frac{1395\sqrt{7}}{4}$ **c)** $a=18$, $b=10$, $\alpha=109°28'16''$, $\beta=31°35'11''$, $P=40\sqrt{2}$ **d)** $a=24$, $b=10$, $\alpha=133°25'55''$, $P=15\sqrt{15}$.

691. Primijeni teoremu o tangensima; $a=20$, $b=15$.

692. Iz zadane proporcije je $\frac{a+b}{a-b}=\frac{17}{7}$ pa teorema o tangensima daje $\frac{17}{7}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$, $\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2}}}=\frac{7\sqrt{2}}{26}$. Molvajdova jednačina $\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$ daje jednačinu $a+b=221$ itd.; $a=156$, $b=65$, $\gamma=44°45'40''$, $P=3570$.

693. **a)** Tangensova teorema vodi na jednačinu $a-b=2$; $a=15$, $b=13$, $c=4$, $P=24$ **b)** $a=26$, $b=25$, $c=3$, $P=36$ **c)** $a=20$, $b=13$, $c=11$, $P=66$ **d)** $a=21$, $b=17$, $c=10$, $P=84$.

694. **a)** Primijeni molvajdovu jednačinu: $\alpha=112°37'2''$, $\beta=48°27'29''$ $a=37$, $b=30$, $P=180$ **b)** $\beta=61°55'39''$, $\gamma=36°52'12''$, $b=25$, $c=17$, $P=210$.

695. **a)** Iz obrasca $\frac{b+c}{a}=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}$ dobijemo $\frac{b+c-a}{b+c+a}=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}$

a odavde $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{s-a}{s\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}$ i $\gamma=28°4'21''$; $\alpha=112°37'12''$, $b=35$, $c=26$, $P=420$ **b)** $a=28$, $c=17$, $\beta=61°55'39''$, $P=210$.

696. **a)** Primijeni molvajdovu jednačinu: $\alpha=126°52'15''$, $\beta=43°36'7''$, $a=29$, $b=25$, $P=60$ **b)** $b=29$, $c=27$, $P=270$, $\beta=22°37'12''$.

697. **a)** U relaciji $a+b+c=2s$ zamijeni $a=2R\sin\alpha$ itd. Izlazi: $R=\frac{10}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}=\frac{5}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$, $a=2R\sin\alpha=$

$=\frac{10\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=8$, $b=5$, $c=7$, $P=10\sqrt{3}$ **b)** $a=17$, $b=28$, $c=39$, $P=210$.

698. **a)** Primijeni obrazac $\frac{b+c}{a}=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$; $\beta=36°52'12''$, $b=37$, $c=20$, $P=306$ **b)** $\alpha=126°52'12''$, $a=52$, $c=25$, $P=330$.

699. **a)** $P=\frac{ac\sin\beta}{2}$ daje jednačinu $ac=24$ koja u sistemu s $a-c=5$ daje $a=8$, $c=3$. Kosinusova teorema daje $b=7$, $\alpha=98°13'$

b) $b=16$, $a=5$, $c=19$, $\alpha=13°10'25''$ **c)** $a=15$, $b=8$, $c=13$, $\alpha=87°47'45''$ **d)** $a=7$, $b=8$, $c=13$, $\alpha=27°47'45''$.

700. **a)** Iz obrasca $P=\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$ dobijamo $a=21$; b možemo naći pomoću sinusove teoreme. Izlazi: $b=17$, $c=10$ **b)** $a=29$, $b=25$, $c=6$, $\alpha=126°52'12''$.

701. **a)** Iz obrazaca $P=\frac{ac\sin\beta}{2}$ i $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$ dobije se sistem jednačina $a+c=\sqrt{b^2+4P\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}$, $a-c=\sqrt{b^2-4P\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}$ iz kojeg izlazi: $a=17$, $c=9$, $\alpha=126°52'11''$ **b)** $b=30$, $c=13$, $\beta=48°27'19''$.

702. *a)* Iz $b^2+c^2-2bc\cos\alpha=a^2$ i $\frac{bc\sin\alpha}{2}=P$ slijedi $(b+c)^2=a^2+$ $+4P\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ i $(b-c)^2=a^2-4P\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ a odavde $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{4P}$ i $b-c=\sqrt{a^2-4P\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha=126°52'12''$, $\beta=43°36'10''$, $\gamma=9°31'38''$, $b=25$, $c=6$ **b)** $a=51$, $b=37$, $\alpha=124°12'20''$, $\beta=36°52'12''$.

703. **a)** Iz $\sin 2\beta:\sin\beta=6:5$ izlazi: $\cos\beta=\frac{3}{5}$, $\sin\beta=\frac{4}{5}$, $\sin\gamma=$ $=\sin 3\beta=\frac{44}{125}$. Iz jednačina $\frac{ab}{2}\sin\gamma=132$ i $a:b=6:5$ dobijamo $a=30$, $b=25$; $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$ daje $c=11$ (drugo rješenje ne dolazi u obzir, jer trougao ne može biti jednakokraki), $\beta=53°7'48''$ **b)** $a=10$, $b=8$, $c=3$, $\beta=41°24'34''$ **c)** $a=40$, $b=25$, $c=39$, $\beta=36°52\,12''$.

704. $c=2R\sin\gamma=7$; iz $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ i $a-b=3$ dobijamo $b=5$, $a=8$.

705. $\sin\gamma=\frac{c}{2R}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\gamma=60°$, $\cos\gamma=\frac{1}{2}$. Iz $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ i $a-b=5$ dobijamo $b=3$, $a=8$, $\alpha=98°12'48''$.

706. $\alpha=2\beta$, $\cos\beta=\frac{3}{5}$, $b=2R\sin\beta=25$, $a=\frac{6b}{5}=30$, $b^2=a^2+c^2-$ $-2ac\cos\beta$ daje $c=11$, $P=132$, $\beta=53°7'48''$.

707. **a)** Iz $a+b+c=2s$ izlazi: $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\frac{s}{R}$ ili $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{s}{R}$ a odavde $\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{s}{4R\cos\frac{\alpha}{2}}$ odnosno $\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\beta+\gamma}{2}+\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right]=\frac{s}{4R\cos\frac{\alpha}{2}}$ tj. $\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{s}{2R\cos\frac{\alpha}{2}}-\sin\frac{\alpha}{2}$. Odavde nalazimo $\frac{\beta-\gamma}{2}$. Budući da je poznato $\beta+\gamma$, slijedi: $\beta=$ $=67°23'4''$ i $\gamma=18°55'12''$; $a=40$, $b=37$, $c=13$, $P=240$. Kako ovaj postupak vodi do razlike, što je nezgodno za logaritmiranje, moglo se ići i ovim putem: $a=2R\sin\alpha$, $b+c=2s-a$, molvajdove jednačine itd. **b)** $\alpha=126°52'12''$, $\gamma=22°37'12''$, $a=52$, $b=33$, $c=25$, $P=330$.

708. **a)** $a=2R\sin\alpha=15$. Iz relacija $\frac{bc\sin\alpha}{2}=P$, $b=2R\sin\beta$, $c=2R\sin\gamma$ dobijamo $\sin\beta\sin\gamma=\frac{P}{2R^2\sin\alpha}$ ili $\frac{1}{2}\left[\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)\right]=\frac{P}{2R^2\sin\alpha}$ tj. $\cos(\beta-\gamma)=\frac{P}{R^2\sin\alpha}-\cos\alpha$ itd., $\beta=24°11'22''$, $\gamma=143°7'48''$, $b=28$, $c=41$ **b)** $a=36$, $b=29$, $c=25$, $\alpha=83°16'2''$, $\gamma=43°36'10''$. 713

709. **a)** Iz $ab\sin\gamma=ch_c$ slijedi $ab=\frac{15}{7}c$; dalje imamo $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma=(a+b)^2-4ab\cos^2\frac{\gamma}{2}=(a-b)^2-ab=64-\frac{15}{7}c$. Iz jednačine $c^2=64-\frac{15}{7}c$ dobijemo $c=7$, pa je $ab=15$; $a=3$, $b=5$ ili obrnuto, **b)** $b=7$, $c=8$, ili obrnuto, $a=13$ **c)** $a=8$, $c=3$, $b=7$. 714

710. **a)** $P=\frac{ah_a}{2}=90$. Iz obrazaca $\frac{bc\sin\alpha}{2}=P$ i $b^2+c^2-2bc\cos\alpha=a^2$ dobijamo sistem jednačina $b+c=\sqrt{a^2+4P\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$, $b-c=\sqrt{a^2-4P\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$ iz kojih izlazi $b=17$. $c=12$, $\beta=36°52'12''$, $\gamma=25°3'27''$ **b)** $P=24$, $a=15$, $b=13$, $\alpha=112°37'12''$, $\beta=53°7'48''$. 715

711. **a)** Kako je $b^2+c^2=a^2+2bc\cos\alpha$ i $2bc=\frac{2ah_a}{\sin\alpha}$, sabiranjem, a iza toga oduzimanjem tih jednačina, dolazimo do $(b+c)^2$ i $(b-c)^2$ i odavde, na kraju, $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2ah_a}$ i $b-c=\sqrt{a^2-2ah_a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. Iz prve jednačine slijedi $\alpha=112°37'12''$ a iz druge zajedno sa $b+c=17$ nalazimo $b=13$, $c=4$, $\beta=53°7'48''$, $\gamma=14°15'$, $P=24$ **b)** $\beta=43°36'10''$, $\gamma=9°31'38''$, $a=29$, $c=6$, $P=60$. 716

712. **a)** Iz obrazaca $r=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ i $a=2R\sin\alpha$ slijedi:

$$a=\frac{r\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}=35,\quad b=29,\quad c=8,\quad P=84$$ **b)** $a=28$, $b=25$, $c=17$, $P=210$.

713. **a)** Iz jednačine $\sin 2\beta : \sin\beta = 6:5$ dobijemo $\cos\beta = \frac{3}{5}$; $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}} = \frac{1}{2}$. Polazeći od obrasca $r = (s-b)\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ dolazimo do jednačine $\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{1}{2} = 4$ koja u sistemu sa jednačinama $a:b = 6:5$ i $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\frac{3}{5}$ ima rješenja: $a = 30$, $b = 25$, $c = 11$, $\beta = 53°7'48''$ **b)** $a = 40$, $b = 25$, $c = 39$, $\beta = 36°52'12''$

c) $a = 195$, $b = 125$, $c = 112$, $P = 6552$, $\beta = 36°52'12''$. Nađi i druga rješenja.

714. **a)** $b = \frac{h_a}{\sin\gamma} = 29$. Iz relacije $b = r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)$ (nacrtaj sliku!) dobijamo $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{r} - \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$; odavde slijedi: $\alpha = 20°58'58''$, $a = 27$, $c = 52$, $P = 270$ **b)** $a = 53$, $b = 35$, $c = 24$, $P = 336$, $\alpha = 126°52'12''$.

715. **a)** Iz relacija $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$, $r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ i $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ slijedi $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r^2}{P-ar}$ a odavde $\alpha = 83°16'2''$; analogno nalazimo: $\beta = 53°7'48''$, $b = 29$, $c = 25$ **b)** $a = 20$, $c = 11$, $\alpha = 112°37'12''$ $\beta = 36°52'12''$.

716. **a)** Imamo: $b - c = (s-c) - (s-b) = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} - \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = r\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} = r\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2} - \cos\frac{\beta+\gamma}{2}}$ ili, na kraju, $b - c = r\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}$.

Odavde dobijamo: $\alpha = 81°12'9''$, $\beta = 61°55'39''$, $\gamma = 36°52'12''$, $a = 28$, $b = 25$, $c = 17$, $P = 210$ **b)** $a = 51$, $b = 40$, $c = 13$, $P = 156$, $\alpha = 143°7'48''$, $\beta = 28°4'21''$.

717. **a)** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{s-a}$, $\alpha=112°37'12''$. Iz obrasca $\frac{b+c}{a}=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ nalazimo $\frac{\beta-\gamma}{2}$ itd.; $\beta=36°52'12''$, $\gamma=30°30'37''$, $b=13$, $c=11$, $P=66$ **b)** $a=53$, $b=35$, $\alpha=126°52'12''$, $\beta=31°53'27''$, $P=336$.

718. **a)** Iz relacije $r=(s-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ izlazi: $a=b+c-\frac{2r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=51$, $b=40$, $c=13$, $\beta=28°4'21''$, $\gamma=8°47'51''$, $P=156$ **b)** $a=37$, $b=20$, $c=19$, $\alpha=143°7'48''$, $\beta=18°55'29''$, $P=114$.

719. **a)** $a=2R\sin\alpha=39$. Iz obrasca $r=(s-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ nalazimo $s=40$; iz s i a slijedi: $b+c=41$ ili $2R(\sin\beta+\sin\gamma)=41$, a odavde je $\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{41}{4R\cos\frac{\alpha}{2}}$ tj. $\beta-\gamma=8°22'$; a kako je $\beta+\gamma=180°-\alpha=36°52'12'$, to je $\beta=22°37'6''$ i $\gamma=14°15'6''$; $b=2R\sin\beta=25$, $c=16$, $P=120$. **b)** $a=15$, $b=13$, $c=4$, $\alpha=112°37'12''$, $P=24$.

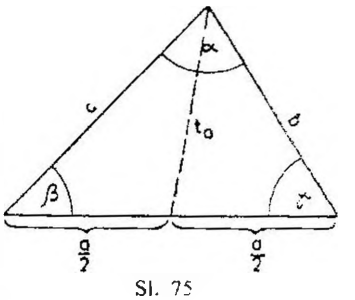
720. $b=\frac{2\sqrt{3}}{3}h_c$, $a^2=\frac{4h_c^2+3c^2-2ch_c\sqrt{3}}{3}$; u specijalnom slučaju je $b=10$, $a=14$.

721. **a)** Iz obrazaca $r=(s-c)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{a+b-c}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, $ch_c=ab\sin\gamma$, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ slijedi $a+b=c+\frac{2r}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$, $2ab=\frac{2ch_c}{\sin\gamma}$, $a^2+b^2=c^2+2ch_c\operatorname{ctg}\gamma$. Sabiranjem druge i treće jednačine dobićemo $(a+b)^2$ koji se može zamijeniti izrazom iz prve jednačine, pa dobivamo $\left(c+\frac{2r}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}\right)^2=c^2+2ch_c\operatorname{ctg}\gamma+\frac{2ch_c}{\sin\gamma}$; odavde je: $c=\frac{2r^2\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{h_c-2r}=9$, $a=17$, $b=10$, $P=36$, $\alpha=126°52'12''$, $\beta=28°4'21''$ **b)** $a=37$, $b=20$, $c=19$, $P=114$, $\alpha=143°7'48''$, $\gamma=17°56'43''$.

722. **a)** Između zadanih veličina i veličina a, b, c, α postoje veze: $r=\frac{b+c-a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $a=2R\sin\alpha$, $bc\sin\alpha=ah_a$, $b^2+c^2-2bc\cos\alpha=a^2$; iz tih jednačina slijedi $b+c=2R\sin\alpha+\frac{2r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, $2bc=4Rh_a$, $b^2+c^2=4R^2\sin^2\alpha+4Rh_a\cos\alpha$. Sabiranjem druge i treće jednačine, a uzevši u obzir i prvu, slijedi na kraju $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{r^2}{2R(h_a-2r)}$; odavde je $\alpha=81°12'9''$, $b=25$, $c=17$, $a=28$, $\beta=61°55'39''$, $\gamma=36°52'12''$, $P=210$ **b)** $a=52$, $b=33$, $c=25$, $\alpha=126°52'12''$ $\beta=30°30'37''$, $P=330$.

723. **a)** $a=\frac{2P}{h_a}=102$. Ugao α možemo naći iz relacije $\sin\alpha=\frac{a}{2R}$; odavde slijede dvije vrijednosti, i to: $\alpha_1=36°52'12''$, $\alpha_2=143°7'48''$. Stranice b i c dobivamo iz sistema $b^2+c^2=a^2+4P\operatorname{ctg}\alpha$, $bc=\frac{2P}{\sin\alpha}$ odakle prethodno nađemo $b+c$ i $b-c$; za α_2 je $b=80$, $c=26$. **b)** Jedno rješenje je $a=52$, $b=41$, $c=15$, $\alpha=130°26'59''$, $\beta=36°52'12''$.

724. Imamo (vidi sliku 75) $t_a^2=c^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-ac\cos\beta$, $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$; odavde izlazi: $b^2-2t_a^2=a^2+c^2-2c^2-\frac{a^2}{2}$ ili $a=5\sqrt{2}$. Iz relacije $\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ dobićemo $\cos\alpha=\frac{47}{72}$ itd.



Sl. 75

725. Iz relacija $4t_a^2=a^2+8P\operatorname{ctg}\alpha$ i $P=\frac{ah_a}{2}$ slijedi: $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{4t_a^2-b^2}{4ah_a}$ odakle se može naći α. Iz relacija $bc\sin\alpha=ah_a$, $a=2R\sin\alpha$, $b=2R\sin\beta$, $c=2R\sin\gamma$ slijedi: $\sin\beta\sin\gamma=\frac{h_a\sin\alpha}{a}$, i dalje $\cos(\beta-\gamma)=\frac{2}{a}h_a\sin\alpha-\cos\alpha$ odakle se nađe $\beta-\gamma$, a odavde iz jednačine $\beta-\gamma=180°-\alpha$ slijedi β i γ. Stranice b i c možemo odrediti iz sistema jednačina $b^2+c^2=a^2+2ah_a\operatorname{ctg}\alpha$, $bc=\frac{ah_a}{\sin\alpha}$

gdje je $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{11\sqrt{5}}{40}$ a $\sin\alpha=\frac{8\sqrt{5}}{21}$; $b=7$, $c=9$ ili obrnuto.

726. Iz jednačina $\frac{ab}{2}\sin\gamma=P$ i $a^2+b^2+2ab\cos\gamma=4t_c^2$ možemo naći $(a+b)^2=4t_c^2+4P\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ i $(a-b)^2=4t_c^2-4P\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$. Iz prve relacije je $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{(a+b)^2-4t_c^2}{4P}$, a iz druge nalazimo $a-b$ koji u sistemu sa zadanom sumom $a+b$ daje a i b.

727. $\operatorname{tg}\alpha=55k$, $\operatorname{tg}\beta=70k$, $\operatorname{tg}\gamma=90k$. Kako za uglove trougla važi relacija $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$, to je $k=\frac{4}{165}$ i $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{56}{33}$, $\operatorname{tg}\gamma=\frac{12}{5}$. Kako je $\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{4}{5}$, $\sin\beta=\frac{56}{65}$, $\sin\gamma=\frac{12}{13}$, to je $\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma=13:14:15$; prema tome je $a:b:c=13:14:15$; $a=2R\sin\alpha=104$, $b=112$, $c=120$.

728. Iz zadane proporcije je $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=21k$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=24k$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=28k$. Kako za uglove trougla vrijedi relacija $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=1$, to je $k=\frac{1}{42}$, pa je $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{4}{7}$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{2}{3}$. Kako je $\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{4}{5}$, $\sin\beta=\frac{56}{65}$, $\sin\gamma=\frac{12}{13}$, to je $\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma=13:14:15$, pa je i $a:b:c=13:14:15$. Odavde je $a=13q$, $b=14q$, $c=15q$, pa obrazac $P=\frac{bc}{2}\sin\alpha$ daje $q=2$ te je $a=26$, $b=28$, $c=30$.

729. Primijeni heronovske formule za $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ i $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$. Izlazi: $3(s-b)=s$ ili $a+c=2b$ što je i trebalo dokazati.

730. Prema molvajdovim jednačinama je $\frac{a-c}{b}\cdot\frac{a+c}{b}=$ $=\frac{\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$ ili $\frac{a^2-c^2}{b^2}=\frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\sin\beta}$, a odavde $a\frac{a\sin\beta}{b}=$ $=c\frac{c\sin\beta}{b}+b\sin(\alpha-\gamma)$. Prema sinusovoj teoremi imamo: $\frac{a\sin\beta}{b}=$ $=\sin\alpha$ i $\frac{c\sin\beta}{b}=\sin\gamma$, pa zamjenom izlazi tražena relacija.

731. Prema sinusovoj teoremi je $b\sin\gamma-c\sin\beta=0$, $c\sin\alpha-a\sin\gamma=0$, $a\sin\beta-b\sin\alpha=0$. Ako pomnožimo ove jednačine redom sa $\cos\alpha$, $\cos\beta$ i $\cos\gamma$ i saberemo, izlazi tražena relacija.

732. Podi od relacija $a=2R\sin\alpha$, $b=2R\sin\beta$, $c=2R\sin\gamma$; pomnoži ih redom sa $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ i saberi, pa izlazi: $a\sin\alpha+b\sin\beta+$ $+c\sin\gamma=\frac{1}{2R}(4R^2\sin^2\alpha+4R^2\sin^2\beta+4R^2\sin^2\gamma)=\frac{1}{2R}(a^2+b^2+$ $+c^2)$...(1). Ako pomnožimo polazne relacije sa $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ i saberemo, dobijemo $a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma=R(2\sin\alpha\cos\alpha+$ $+2\sin\beta\cos\beta+2\sin\gamma\cos\gamma)=R(\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma)$, a kako za uglove trougla vrijedi $\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, to je $a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma=4R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=$ $=4R\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R}=\frac{abc}{2R^2}$...(2). Ako podijelimo (1) sa (2) izlazi tražena relacija.

733. Kako je $a=2R\sin\alpha$, $b=2R\sin\beta$, $c=2R\sin\gamma$, imamo $\frac{\cos\alpha}{c\sin\beta}+$ $+\frac{\cos\beta}{a\sin\gamma}+\frac{\cos\gamma}{b\sin\alpha}=\frac{\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma}{4R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$. Uzmi u obzir da je $\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ itd.

734. Uzmi $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{s-a}$ i analogno $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ i $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ a kasnije $r=\frac{P}{s}$ i $P=\frac{abc}{4R}$.

735. Uzmi $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{s-a}$ itd.

736. **a)** Iz $r=(s-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{b+c-a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ pomoću $a=2R\sin\alpha$ itd. izlazi: $r=R(\sin\beta+\sin\gamma-\sin\alpha)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$. **b)** Uzmi $a=2R\sin\alpha$, $b=2R\sin\beta$, $c=2R\sin\gamma$ i saberi jednačine. **c)** Slijedi iz relacija pod a) i b). **d)** U relaciji $r_a=s\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ zamijeni s koji dobiješ iz b) **e)** U relaciji a) zamijeni $R=\frac{a}{2\sin\alpha}$ itd. **f)** Pođi od relacije d) pa zamijeni $R=\frac{a}{2\sin\alpha}$ itd. **g)** Uzmi u obzir relacije pod d) i a), iz dva i dva člana izluči zajednički faktor itd. **h)** Nađi a i b prema obrascu e) i uvrsti u $P=ab\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$. **i)** Iz relacija pod a) i d) slijedi $r=r_a\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, zatim izvrši zamjenu u h).

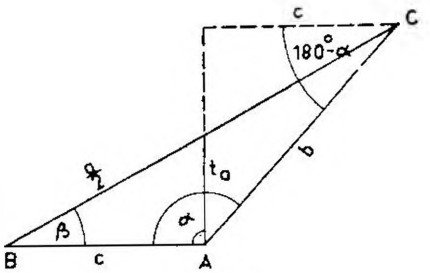
737. **a)** Zadanu relaciju dovedi na oblik $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{\gamma+\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\beta}{2}$ a odavde $\cos\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\gamma-\beta}{2}$ ili $\alpha=\gamma-\beta$, vodeći računa o vezi $\alpha+\beta+\gamma=180°$ slijedi $\gamma=90°$. **b)** Relaciju dovedi na oblik $2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$; odavde je $\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ tj. $\gamma=90°$ **c)** Treba da je $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+1$, $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+2$. Međutim, uglovi trougla zadovoljavaju relaciju $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$; iz tih relacija izlazi jednačina $\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}+3\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-3=0$ koja se može napisati u obliku $\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+3\right)\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)=0$ itd. U obzir dolazi samo $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=1$ tj. $\alpha=90°$. **d)** Neka je $c=2a$ i $2\beta=\alpha+\gamma$. Kako je $\alpha+\beta+\gamma=180°$, to je $\beta=60°$ i $\alpha+\gamma=120°$; sinusova teorema vodi na jednačinu $1:2=\sin\alpha:\sin(120°-\alpha)$ odakle je $\alpha=30°$ i $\gamma=90°$. **e)** Uzmi $b=2R\sin\beta$ itd.; dobićeš $\cos\frac{\beta}{2}=\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}$, dakle, $\beta=\alpha-\gamma$ tj. $\alpha=90°$.

738. **a)** Uzmi $\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$; slijedi $\sin(\beta - \gamma) = 0$ tj. $\beta = \gamma$. **b)** Uzmi $\cos^3\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\beta}{2}\left(1 - \sin^2\frac{\beta}{2}\right)$ i analogno $\cos^3\frac{\alpha}{2}$ pa ćeš dobiti $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}(\sin\beta - \sin\alpha)$ i odavde $\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + 1\right) = 0$ tj. $\sin\frac{\beta-\alpha}{2} = 0$ i $\beta = \alpha$.

739. **a)** Uzmi $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}$ itd. i uzmi u obzir da je $s = 2b$.

740. **a)** Stranice treba da zadovoljavaju uslov $a + c = 2b$ pa je $2s = 3b$; Uzmi $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}$ itd. **c)** Uzmi $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ itd.

741. **a)** Ako zamijenimo $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ i $t_a^2 = \frac{a^2}{4} - c^2$ u obrascu $4t_a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha$ (vidi sl. 76), odmah izlazi tražena relacija. **b)** Pođi od relacije $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ i zamijeni a^2 sa $b^2 + 3c^2$.



Sl. 76,

d) $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{b^2 + c^2}{ab}$ (zbog a); $\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\gamma}{2}} = \sqrt{\frac{ab - b^2 - c^2}{2ab}}$ gdje je $c^2 = \frac{a^2 - b^2}{3}$ (opet zbog *a*) itd.

742. **a)** Iz relacije $a = r_a\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)$ (nacrtaj sliku!) dobijemo:

$\beta = 61° 55' 39''$, $\alpha = 81° 12' 9''$, $b = 35$, $c = 17$, $P = 210$.

b) $a = 36$, $b = 29$, $\beta = 53° 7' 48''$, $P = 360$.

743. **a)** Imamo $P = r_a^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 360$.

Iz $r_a = 4R \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}$ i $a = 2R \sin\alpha$ slijedi:

$a = \dfrac{r_a \cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = 36;\ b = 29,\ c = 25.$ **b)** $a = 52,\ b = 33,\ c = 25,$ $P = 330.$

744. Relaciju $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ možemo pisati u obliku $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} =$

$$= \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)} = \frac{\dfrac{P^2}{(s-a)^2}}{P^2 \dfrac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{(s-a)(s-b)(s-c)}} =$$

$$= \frac{\dfrac{P^2}{(s-a)^2}}{\dfrac{P^2}{(s-b)(s-c)} + \dfrac{P^2}{(s-c)(s-a)} + \dfrac{P^2}{(s-a)(s-b)}} = \frac{r_a^2}{r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b};$$

odavde dobijemo $\alpha = 126° 52' 12''$. Iz slične formule za $\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$ naći ćeš $\beta = 28° 4' 21''$, $\gamma = 25° 3' 27''$; a možemo dobiti iz relacije $a = \dfrac{r_a \cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = 34$. Međutim, veličinu a možemo izraziti i pomoću zadanih veličina jer $a = \dfrac{aP}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} =$

$$= \frac{\dfrac{aP}{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}}{\sqrt{\dfrac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}}} =$$

$$= \frac{\dfrac{P}{s-a}\left(\dfrac{P}{s-b} + \dfrac{P}{s-c}\right)}{\sqrt{\dfrac{P^2}{(s-b)(s-c)} + \dfrac{P^2}{(s-c)(s-a)} + \dfrac{P^2}{(s-a)(s-b)}}} =$$

$$= \frac{r_a(r_b + r_c)}{\sqrt{r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b}} = 34;\ b = 20,\ c = 18,\ P = 144$$ **b)** $a = 21,$ $b = 17,\ c = 10,\ P = 84,\ \alpha = 98° 47' 51''.$

745. Prema formuli $s_\gamma = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}$ izlazi $11ab = 24(a+b)$; kako je $a = k\sin\alpha$, $b = k\sin\beta$, to je $a = \frac{24(\sin\alpha+\sin\beta)}{11\sin\beta} = \frac{24\sqrt{3}\cos 38°\,12'\,48''}{11\sin 21°\,47'\,12''} = 8$, $b = 3$, $c = 7$, $P = 6\sqrt{3}$.

746. Iz obrasca $s_\gamma = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}$ nalazimo $\gamma = 120°$, $c = 7$. $P = \frac{15\sqrt{3}}{4}$, $\alpha = 21°\,47'\,24''$.

747. Ugao između s_γ i h_c je (nacrtaj sliku!) $\pm\frac{\alpha-\beta}{2}$; stoga je $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{h_c}{s_\gamma}$; $\alpha = 81°\,47'\,24''$, $\beta = 38°\,12'\,48''$, $a = \frac{h_c}{\sin\beta} = 8$, $b = 5$, $c = 7$, $P = 10\sqrt{3}$.

748. Iz relacije $\sin\gamma = \frac{h_b}{a}$ (nacrtaj sliku!) izlazi: $\gamma_1 = 60$ i $\gamma_2 = 120°$, $c_1 = 13$, $c_2 = \sqrt{409}$, $\alpha_1 = 87°\,47'\,45''$, $\alpha_2 = 39°\,58'$,

749. Imamo: $b = \frac{ah_a}{h_b} = 25$, $\sin\gamma = \frac{h_a}{b} = \frac{4}{5}$; $\cos\gamma = \frac{3}{5}$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, $c = 29$, $\gamma = 53°\,7'\,50''$; uglove α i β možemo naći pomoću sinusove teoreme ili pomoću relacije $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{h_b-h_a}{h_b+h_a}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$; $\alpha = 83°\,15'\,53''$.

750. Iz relacija $a:b = h_b:h_a$ i $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$ slijedi: $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{h_b-h_a}{h_b+h_a}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$, $\alpha = 98°\,12'\,48''$, $\beta = 21°\,47'\,12''$, $b = \frac{h_a}{\sin\gamma} = 3$, $a = 8$, $c = 7$, $P = 6\sqrt{3}$.

451. Neka je φ ugao između stranica $\frac{a}{2}$ i t_a nasuprot stranice c (nacrtaj sliku!); tada je $\cos\varphi = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + t_a^2 - c^2}{2\cdot\frac{a}{2}\cdot t_a} = -\frac{1}{2}$ tj. $\varphi = 120°$,

$b^2 = t_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2t_a\cdot\frac{a}{2}\cos 60° = 19$, $b = \sqrt{19}$.

752. Neka je φ ugao koji zatvara t_c sa c i leži nasuprot stranice a; tada je $a^2 = t_c^2 + \frac{c^2}{4} - ct_c\cos\varphi$ i $b^2 = t_c^2 + \frac{c^2}{4} + ct_c\cos\varphi$; odavde je $c^2 = 2(a^2 + b^2) - 4t_c^2$; $c = 12$. Iz heronove formule $P = 12\sqrt{10}$.

753. Označimo li ugao između težišnih linija sa φ, tada je $\frac{b^2}{4} = \frac{4}{9}t_c^2 + \frac{1}{9}t_b^2 - \frac{4}{9}t_b t_c\cos\varphi$ i $a^2 = \frac{4}{9}t_b^2 + \frac{4}{9}t_c^2 + \frac{8}{9}t_b t_c\cos\varphi$. Iz ovih jednačina slijedi: $3b^2 = 4t_b^2 + 8t_c^2 - 6a^2$ odakle se može odrediti b. Analognim postupkom dobićemo $3c^2 = 8t_b^2 + 4t_c^2 - 6a^2$; odavde izlazi c. Tako poznajemo sve tri stranice trougla iz kojih je moguće na poznati način odrediti uglove.

754. **a)** Iz relacija $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, $4t_a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha$, $bc\sin\alpha = ah_a$ slijedi: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4t_a^2 - a^2}{4ah_a}$, $(b+c)^2 = a^2 + 2ah_a\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $(b-c)^2 = a^2 - 2ah_a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. U našem slučaju je $\operatorname{ctg}\alpha = 0$ pa je $\alpha = 90°$; $(b+c)^2 = 49$, $(b-c)^2 = 1$; odavde je $b = 4$, $c = 3$ **b)** $\operatorname{ctg}\gamma = \frac{11\sqrt{5}}{40}$, $\gamma = 58°\,24'\,45''$, $(b+a)^2 = 256$, $(b-a)^2 = 4$, $b = 9$, $a = 7$.

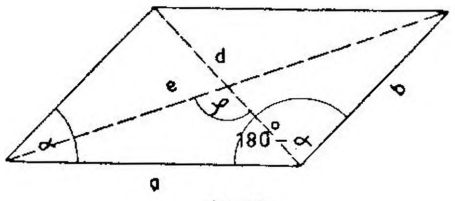
15. Primjena trigonometrije

755. Ako je γ ugao nasuprot dijagonale, onda imamo $13^2 = 7^2 + 8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cos\gamma$; $\gamma = 120°$.

756. $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = -\frac{1}{2}$, $\gamma = 120°$; manji ugao iznosi $60°$. Druga dijagonala $d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60°$, $d = \sqrt{19}$. $P = ab\sin\gamma = \frac{15\sqrt{3}}{2}$.

757. Iz jednačina $2a + 2b = 22$ i $ab\sin\alpha = 12\sqrt{3}$ dobićemo $a = 8$, $b = 3$ (ili obrnuto).

758. **a)** Imamo (sl. 77) $d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$ (1); odavde je $d = 7$; $e^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$ (2), $e = \sqrt{129}$. Sabiranjem jednačina (1) i (2) izlazi: $d^2 + e^2 = 2(a^2 + b^2) = 178$ (3). Za površinu imamo: $P = ab\sin\alpha = 20\sqrt{3}$ i $P = \frac{1}{2}de\sin\varphi = 20\sqrt{3}$ tj. $de = \frac{40\sqrt{3}}{\sin\varphi}$ (4); $a^2 = \frac{1}{4}(d^2+e^2) - \frac{1}{2}de\cos\varphi$ (5). Iz (3), (4) i (5) izlazi: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2ab\sin\alpha}{b^2-a^2} = -\frac{40\sqrt{3}}{39}$, $\varphi = 119° 22' 31''$



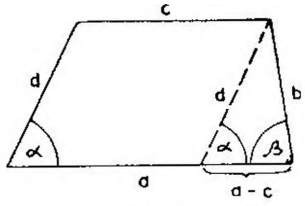
Sl. 77

b) $d = 13$, $e = \sqrt{57}$, $P = 28\sqrt{3}$ **c)** $\sin\alpha = \frac{(a^2-b^2)\operatorname{tg}\varphi}{2ab}$; zadatak ima smisla ako je $(a^2 - b^2)\operatorname{tg}\varphi \leqslant 2ab$. U našem slučaju je $\sin\alpha = \frac{156}{320}\operatorname{tg} 60° 37' 29''$ i $\alpha = 60°$. **d)** Iz relacija $e^2 - d^2 = 4ab\cos\alpha$ i $P = ab\sin\alpha$ slijedi: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4P}{e^2-d^2}$; iz obrasca $P = \frac{1}{2}de\sin\varphi$ je

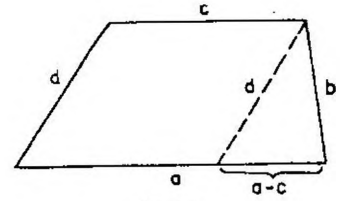
$\sin\varphi = \frac{2P}{de}$, $(2P \leqslant de)$. Iz jednačina $b^2 - a^2 = \frac{2ab\sin\alpha}{\operatorname{tg}\varphi} = 2P\operatorname{ctg}\varphi$ i $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}(d^2 + e^2)$ možemo naći a i b. **e)** $\alpha = 60°$. $a = 8$. $b = 5$.

759. Saberi jednačine $d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$ i $e^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$.

760. Razmotri trougao čije su stranice $a - c = 39$ i nalegli uglovi α i β (sl. 78); $b = 25$, $d = 16$.



Sl. 78



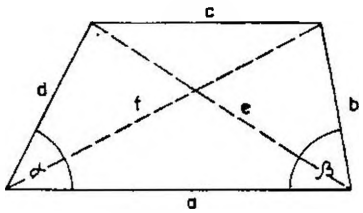
Sl. 79

761. Posmatraj trougao čije su stranice $a - c = 8$, $b = 7$, $d = 3$. (sl. 79).

762. Površina trapeza $P = \frac{(a+c)\,b\sin\beta}{2}$. Kako je $b : (a-c) = \sin\alpha : \sin(\alpha+\beta)$, izlazi: $P = \frac{b(a^2-c^2)\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$. (sl. 52).

763. Ako je α ugao na osnovici a d dijagonala, onda je traženi poluprečnik $R = \frac{d}{2\sin\alpha}$. Kako je $\cos\alpha = \frac{a-c}{2b}$, to je $\sin\alpha = \frac{1}{2b}\sqrt{4b^2 - (a-c)^2}$, a $d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = b^2 + ac$. Prema tome je $R = \frac{b\sqrt{b^2+ac}}{\sqrt{4b^2-(a-c)^2}}$.

764. Ako su e i f dijagonale trapeza, tada imamo (sl. 80) $e^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha$ i $f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$; odavde je $e^2 + f^2 = 2a^2 + b^2 + d^2 - 2a(b\cos\beta + d\cos\alpha)$. Uzmi u obzir da je $b\cos\beta + d\cos\alpha = a - c$, pa izlazi tražena teorema.



Sl. 80

765. Najduža stranica $c = 7$ dobije se pomoću kosinusove teoreme. Ako je druga dijagonala deltoida d, onda je $ab\sin\gamma =$

$= \frac{cd}{2}$; odavde je $d = \frac{15\sqrt{3}}{7}$. Ako je r polupre\v{c}nik upisane kru\v{z}nice, onda za povr\v{s}inu deltoida va\v{z}i $(a+b)r = ab\sin\gamma$; odavde dobijemo $r = \frac{15\sqrt{3}}{16}$.

766. Pojedine stranice tetivnog četvorougla vide se iz središta kružnice pod uglovima $\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}$, pa je površina četvorougla $P = \frac{r^2}{2}\left(\sin\frac{\pi}{5} + \sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{3\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{r^2}{2}\left(2\sin\frac{3\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10} + 2\sin\frac{7\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}\right) = 2r^2\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}$. (Nacrtaj sliku!)

767. Za dijagonalu e važi $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = c^2 + d^2 + 2cd\cos\beta$ (Nacrtaj sliku!); odavde je $\cos\beta = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$ i $\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}} = \sqrt{\frac{(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{4(ab+cd)}}$. Neka je $a+b+c+d = 2s$; tada imamo $\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-d)}{ab+cd}}$; analogno $\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab+cd}}$. Prema tome je $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)(s-d)}}$ i $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}}$. Polazeći od $\sin^2\alpha = (1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$ dobićemo $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{ad+bc}$.

Kako je $P = \frac{ad+bc}{2}\sin\alpha$, izlazi: $P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$.

768. Za tangentni četvorougao važi $a + c = b + d$ tj. $s = a + c$ odnosno $s = b + d$. Ako zamijenimo s u izrazu za P iz prethodnog zadatka, dobićemo traženu formulu.

769. Baza prizme biće $B = r^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ a visina $h = b\sin\varphi$; zapremina $V = br^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\sin\varphi$.

770. Baza prizme je $\frac{ab\sin\gamma}{2}$; njezina visina $h=\frac{2V}{ab\sin\gamma}$; polupreč nik baze cilindra $r=(s-c)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$; zapremina cilindra je $r^2\pi h$. Specijalno $r=3\sqrt{3}$, $h=\frac{25\sqrt{3}}{39}$.

771. $V=\frac{abc}{2}\sin 120^\circ \sin 80^\circ$.

772. $V=2aR^2\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi\sin(\alpha+\beta)$.

773. $b=2R\sin\beta=21$. Iz $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$ dobićemo $c=15$. Zapremina $V=\frac{ac\sin\beta}{2}h=675\sqrt{3}$.

774. Pomoću kosinusove teoreme dobićemo dijagonalu $d=13$. Za površinu deltoida imamo $dr=ab\sin 120^\circ$ odakle je $r=\frac{28\sqrt{3}}{13}$. Zapremina $V=\frac{r^2\pi d}{3}=\frac{784\pi}{13}$.

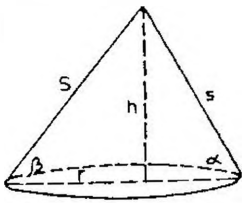
775. $P=\frac{2a^2\pi\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2(\beta+\gamma)}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$, $V=\frac{a^3\pi\sin^2\beta\sin^2\gamma}{3\sin^2(\beta+\gamma)}$.

776. $\cos\gamma=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}=\frac{5}{27}$; $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$, $c=16$. Površina trokuta $P=\frac{ab}{2}\sin\gamma=20\sqrt{11}$. Polupreč nik r baze kupe dobije se iz jednačine $cr=ab\sin\gamma$ pa je $r=\frac{5\sqrt{11}}{2}$; zapremina $V=\frac{r^2\pi c}{3}=\frac{1100\pi}{3}$.

777. Stranica $c=a-b\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$ (Nacrtaj sliku!); $d=\frac{b\sin\beta}{\sin\alpha}$; visina trapeza $r=b\sin\beta$. Površina $P=r\pi(b+d+2c)$. Zapremina $V=\frac{r^2\pi}{3}(h_1+h_2+3c)$ gdje je $h_1=b\operatorname{ctg}\alpha\sin\beta$. $h_2=b\cos\beta$.

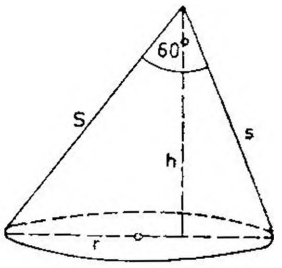
778. Površina $P=\frac{3360\pi\sqrt{3}}{19}$, zapremina $V=\frac{9600\pi}{19}$.

779. Iz relacije $S:s=\sin\alpha:\sin\beta$ i $\alpha=2\beta$ dobićemo $\cos\beta=\frac{2}{3}$ i $\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{3}$. Iz jednačina $S:s=4:3$ i $s^2=S^2+$ $+196-28S\cdot\frac{2}{3}$ nalazimo: $S_1=24$ i $S_2=\frac{56}{3}$; $h_1=S_1\sin\beta=8\sqrt{5}$; $V_1=\frac{392\pi\sqrt{5}}{3}$, (sl. 81) itd.



Sl. 81

780. Imamo: $(2r)^2=S^2+s^2-2Ss\cos 60°$, $r=13$. Iz jednačine $rh=\frac{Ss}{2}\sin 60°$ dobićemo $h=$ $=\frac{105\sqrt{3}}{13}$; $V=455\pi\sqrt{3}$. (sl. 82).



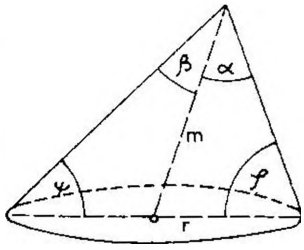
Sl. 82

781. Tražena zapremina iznosi 102π.

782. $V=\frac{2\pi r^3\sin\alpha\sin\beta}{3\sin\gamma}=220\pi$.

783. Ugao γ koji leži nasuprot najduže stranice nalazimo iz relacije $\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}$; odavde je $\gamma=120°$; visina kupe $h=$ $=7\sin(180°-\gamma)=7\frac{\sqrt{3}}{2}$. Zapremina iznosi $\frac{56\pi\sqrt{3}}{3}$.

784. Ako su φ i ψ uglovi koje zatvara najkraća i najduža strana sa bazom, onda je (sl. 83) $\sin\varphi:\sin\psi=\sin\alpha:\sin\beta$, a odavde slijedi: $\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}$. Iz toga nalazimo $\frac{\varphi-\psi}{2}$, a kako je $\varphi+\psi$ poznato, to se lako nalaze uglovi φ i ψ. Visina kupe $h=m\sin(\beta+\psi)$, pa je zapremina $V=\frac{mr^2\pi}{3}\sin(\beta+\psi)$.



Sl. 83

785. Širina rijeke $h=\frac{d\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=57{,}6$. (Nacrtaj sliku!)

786. **a)** $a : x = \sin(\alpha+\beta) : \sin\beta$; $x = \dfrac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ **b)** $x = \dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

787. **a)** $x = \dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$ **b)** $x = \dfrac{h\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

788. Visina balona iznosi $\dfrac{d\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$. **789.** $x = \dfrac{h\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$.

790. **a)** $x = \dfrac{h\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$ **b)** $y = \dfrac{h\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$.

791. $x = \dfrac{h\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$.

792. **a)** $x = \dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$ **b)** $x = \dfrac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

793. **a)** $x = d\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$ **b)** $y = h - d\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$.

794. Iz relacije $(x-h)\operatorname{ctg}\alpha = h\operatorname{ctg}\beta$ izlazi: $x = h\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$.

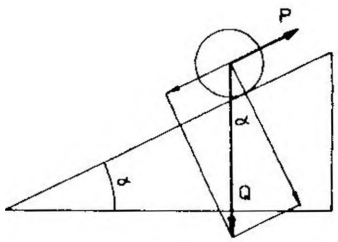
795. $y = \dfrac{x-h}{\sin\alpha}$, $y : 2x = \sin(90^\circ-\beta) : \sin(\alpha+\beta)$; odavde slijedi $x = h\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}$. Možeš poći i od relacije $(x-h)\operatorname{ctg}\alpha = (x-h)\operatorname{ctg}\beta$.

796. Imamo: $a : y = \sin(\alpha+\delta) : \sin\delta$ tj. $y = \dfrac{a\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)}$; dalje je $a : z = \sin(\beta+\gamma) : \sin\gamma$, $z = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$. Traženu veličinu x naći ćemo iz relacije $x^2 = \left[\dfrac{a\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)}\right]^2 + \left[\dfrac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}\right]^2 - 2\dfrac{a\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)}\cdot\dfrac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}\cos(\beta-\alpha)$.

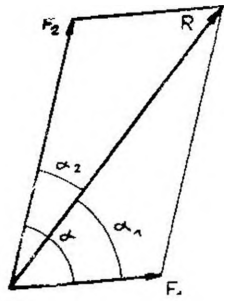
797. $\overline{AM} = \dfrac{a\sin\beta_1}{\sin(\alpha_1+\beta_1)}$, $\overline{AN} = \dfrac{a\sin\beta_2}{\sin(\alpha_2+\beta_2)}$; $\overline{MN}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 - 2\overline{AM}\cdot\overline{AN}\cdot\cos(\alpha_1+\alpha_2)$.

798. $F_1 = Q \sin\alpha = 73.879$ kN. $F_2 = Q\cos\alpha = 94.56$ kN.

799. $P = Q \sin\alpha = 187.62$ kN. (sl. 84)



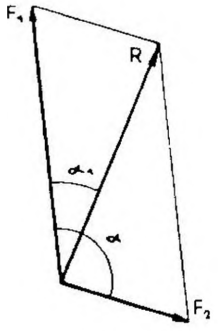
Sl. 84



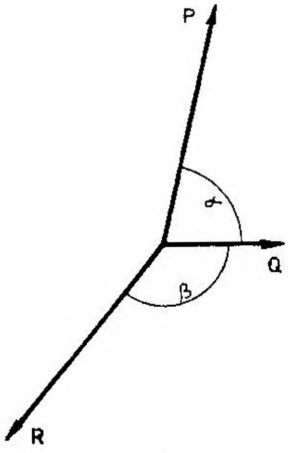
Sl. 85

800. $\dfrac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}=\dfrac{F_1}{F_2}=\dfrac{15}{16}$, $\dfrac{\sin\alpha_2}{\sin 2\alpha_2}=\dfrac{15}{16}$, $\cos\alpha_2=\dfrac{8}{15}$, $\alpha_2=32°\,13'\,52''$.
$\alpha_1=64°\,27'\,44''$. (sl. 85)

801. $R^2=F_1^2+F_2^2-2F_1F_2\cos(180°-\alpha)$, $R\approx 51$ kN. $\alpha_1 = 28°\,4'\,21''$. (sl. 86)



Sl. 86

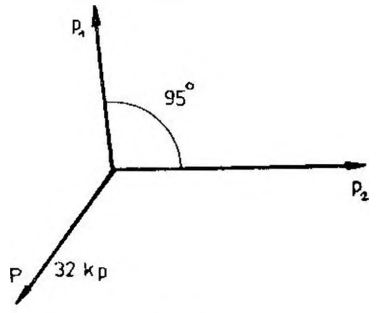


Sl. 87

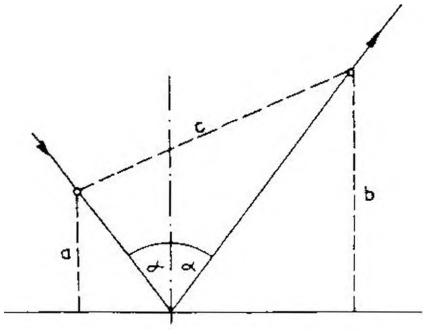
802. $\dfrac{F_2}{F}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$; $F_2 = 34{,}148$ kN. $F_1 = 50.863$ kN.

803. $\alpha = 35°\,30'\,7''$. $\beta = 127°\,14'\,40''$. (sl. 87)

804. $p_1 = 18.65$ kN, $p_2 = 26.10$ kN. (sl. 88)

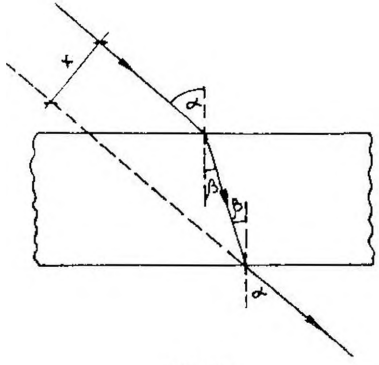


Sl. 88

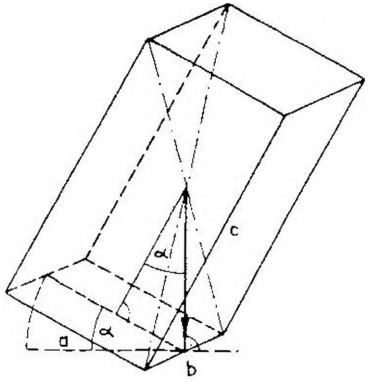


Sl. 89

805. $\alpha = 63° 11' 52''$. (sl. 89)



Sl. 90



Sl. 91

806. $x = 2\,\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cos\beta} = 1{,}8532$. (sl. 20)

807. $x = 2{,}5165$ cm. (sl. 90)

808. $\alpha = 18° 26' 6''$. (sl. 91)

16. Mješoviti zadaci za ponavljanje trigonometrije

809. Zadani proizvod možemo dovesti na oblik $2\sin 2\alpha\cos 2\alpha=\sin 4\alpha$; odavde vidimo da će maksimum nastupiti za $4\alpha=90°\cdot(1+4k)$, a to je za $\alpha=22°30'+k\cdot 90°$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$.

810. Red je konvergentan za $|\cos\alpha|<1$; tada je $\frac{1}{1-\cos^2\alpha}-\frac{\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\frac{2}{3}$. Odavde je $\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\frac{2}{3}$. Kako je $\cos\alpha\neq\pm 1$, to se jednačina smije skratiti sa $1-\cos\alpha$ pa prelazi u oblik $\frac{1}{1+\cos\alpha}=\frac{2}{3}$; odavde nalazimo $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ tj. $\alpha_1=60°$ i $\alpha_2=300°$.

811. Iz date relacije slijedi $2\sin\beta\cos\beta-2\sin\gamma\cos\gamma=0$ ili $\sin 2\beta-\sin 2\gamma=0$ tj. $2\sin(\beta-\gamma)\cos(\beta+\gamma)=0$. Postoje tri mogućnosti: prvo, $\sin(\beta-\gamma)=0$, $\cos(\beta+\gamma)=0$; tada je $\beta=\gamma$ i $\beta+\gamma=90°$ tj. trougao je jednakokrako-pravougli; drugo, $\sin(\beta-\gamma)=0$, ali je $\cos(\beta+\gamma)\neq 0$; tada je $\beta=\gamma$ tj. trougao je jednakokraki; treće, $\sin(\beta-\gamma)\neq 0$, a $\cos(\beta+\gamma)=0$; u ovom slučaju je $\beta+\gamma=90°$ tj. trougao je pravougli. Primijetimo da je prvi slučaj obuhvaćen drugim i trećim.

812. Dovedi brojilac (brojnik) na oblik $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$.

813. Na desnoj strani primijeni $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$; dobiveni izraz skrati itd.

814. Izraz možemo pisati u obliku $a\left(\sin\alpha+\frac{b}{a}\cos\alpha\right)$; uzmemo li $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$, tada prima oblik $\frac{a\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi}$.

815. **a)** Primijeni $\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$; tada je $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sin\frac{2\pi}{5}\ \sin\frac{4\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}\ 2\sin\frac{2\pi}{5}}$.

Ako se uzme $\sin\frac{4\pi}{5}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{\pi}{5}$ i razlomak skrati, izlazi $\frac{1}{4}$.

b) Lijevu stranu dovedi na oblik $2\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}$; iza toga postupi kao u prethodnom zadatku. **c)** Lijevu stranu možemo pisati u obliku $2\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}=\frac{\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}}{2\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}}=\frac{\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10}\right)}=$

$=\frac{\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}}{2\sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{1}{2}$ što je i trebalo dokazati.

816. Primijeni adicionu teoremu na $\cos(\alpha+\beta)$, pa lijeva strana prelazi u oblik $(\sin\alpha\cos\beta)^2+(\cos\alpha\sin\beta)^2+2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta=$ $=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)^2=\sin^2(\alpha+\beta)$.

817. Primijeni adicionu teoremu na $\cos(\alpha+x)$ itd.

818. Primijeni formulu $\sin^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1-\cos\varphi}{2}$ tj. $\sin^2(45°+\alpha)=$ $=\frac{1-\cos(90°+2\alpha)}{2}=\frac{1+\sin 2\alpha}{2}$ i $\sin^2(30°-\alpha)=\frac{1-\cos(60°-2\alpha)}{2}=$ $=\frac{1-\sin(30°+2\alpha)}{2}$; na treći član primijeni obrazac $\sin\alpha\cos\beta=$ $=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$ itd.

819. Lijevu stranu pomnoži i podijeli sa $2\sin\frac{\pi}{7}$ i primijeni formule za proizvode (umnoške) trigonometrijskih funkcija; tada je $\cos\frac{2\pi}{7}+$ $+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=$

$=\frac{\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\pi-\sin\frac{5\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{2}$.

820. Imamo: $\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta=\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)=$

$=\frac{(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$ itd.

821. Imamo: $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}.$

822. Imenilac (nazivnik) dovedi na oblik $\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$, pa lijeva strana prelazi u $\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\frac{(2\sin\alpha\cos\alpha)^2}{4}=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha.$

823. Zamijeni 1 sa $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ a imenilac piši u obliku $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=$ $=(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)$ itd.

824. Lijeva strana prelazi u oblik $\frac{\cos 2\alpha}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]}=$

$=\frac{\cos 2\alpha}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{\cos 2\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=$

$=\frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=1.$

825. Kako je $\sin^2\varphi=\frac{1-\cos 2\varphi}{2}$, lijeva strana prelazi u oblik

$$\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)-1+\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{2}=\frac{2\sin\frac{\pi}{4}\sin 2\alpha}{2}=\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}.$$

826. Lijeva strana prelazi u oblik $\frac{\sin(90^\circ-\alpha)+\sin\alpha}{\sin(90^\circ-\alpha)-\sin\alpha}=\frac{\sqrt{2}\cos(45^\circ-\alpha)}{\sqrt{2}\sin(45^\circ-\alpha)}=$

$=\operatorname{ctg}(45^\circ-\alpha)=\operatorname{tg}[90^\circ-(45^\circ-\alpha)]=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha).$

827. Proširi lijevu stranu sa $\cos\alpha+\sin\alpha$.

828. Lijeva strana se dovodi na oblik $\frac{2(1+\cos 2\alpha)}{\sin 2\alpha}=\frac{2\cdot 2\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=$

$$=2\operatorname{ctg}\alpha=2\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

829. Dovedi na zajednički imenilac (nazivnik). a $2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)$ uzmi u obliku $\sin[\alpha+(\alpha+\beta)]+\sin[\alpha-(\alpha+\beta)]=\sin(2\alpha+\beta)+\sin(-\beta)$ itd.

830. Uzmi $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; time lijeva strana prelazi u oblik $\frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}$ a to je upravo $\frac{2}{\cos 2\alpha}$.

831. Uzmi $x=\frac{\pi}{2}+\alpha$; tada $x\to\frac{\pi}{2}$ kada $\alpha\to 0$. Ovom zamjenom postaje

$$f(x)=\frac{1-\cos\alpha-\sin\alpha}{-1+\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{-2\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}}{-\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}};$$ za $\alpha\to 0$ izraz teži broju 1 pa je $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=1$.

832. **a)** Lijevu stranu dovedi na oblik $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-y\right)$ pa primijeni formulu $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Time dobijamo $\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)}=$

$=\frac{1+\sin 2y}{\cos 2y}$. **b)** Zamijeni $\sin\alpha$ sa $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ i $\cos\alpha$ sa $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ i primijeni formule za sumu i razliku sinusa.

833. Lijeva strana prelazi u oblik $2\sin\frac{2\alpha-\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+$

$$+2\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=2\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{2\alpha-\beta-\gamma}{2}+\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\ \text{itd.}$$

834. Uzmi $\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)$: izraz u prvoj zagradi je 1. Time lijeva strana prelazi u oblik $1-(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=0$.

835. a) Primijeni formulu $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}$ tj. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\ \text{itd.}$$

836. Zamijeni $2\cos^2\alpha$ sa $1+\cos 2\alpha$. U imeniocu (nazivniku) uzmi $(\cos\alpha-\cos 3\alpha)+(\sin 3\alpha-\sin\alpha)$ pa primijeni formule za razliku kosinusa i razliku sinusa itd.

837. Brojilac piši u obliku $2\sin 3\alpha\cos 2\alpha-\sin 3\alpha=\sin 3\alpha(2\cos 2\alpha-1)$ analogno postupi sa imeniocem itd.

838. Zadani uslov se može dovesti na oblik $\sin\alpha(1-A\cos\beta)=A\cos\alpha\sin\beta$ a odavde je $\operatorname{tg}\alpha=\frac{A\sin\beta}{1-A\cos\beta}$. Ako u obrascu $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=$ $=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ zamijenimo $\operatorname{tg}\alpha$ tim izrazom a za $\operatorname{tg}\beta$ uzmemo $\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$, izlazi na kraju $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\cos\beta-A}$ što je i trebalo dokazati.

839. Ako je $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=0$, onda je i $\cos(\alpha+\beta)=0$. Treba dokazati da je $\sin(\alpha+2\beta)=\sin\alpha$ ili, što je isto, $\sin(\alpha+2\beta)-\sin\alpha=0$. Zaista je $\sin(\alpha+2\beta)-\sin\alpha=2\cos(\alpha+\beta)\sin\beta=0$, jer je drugi činilac (faktor) nula.

840. Funkcija se dovodi na oblik $y=\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}+$

$$+\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{2}{\sin^2 x}+\frac{2}{\cos^2 x}-2=2\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}-2=$$

$=2\left(\frac{2}{2\sin x\cos x}\right)^2-2=\frac{8}{\sin^2 2x}-2$. Iz ovoga se vidi da funkcija ima **minimum**, i to: $y_{\min}=6$ kada je $\sin^2 2x=1$ tj. $\sin 2x=\pm 1$ a to je za $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$.

841. Funkcija se može dovesti na oblik $f(x)=\frac{(1-\cos 2x)^3}{8}+$ $+\frac{(1+\cos 2x)^3}{8}=\frac{1+3\cos^2 2x}{4}$. Odavde vidimo da $f(x)$ ima minimum $\frac{1}{4}$ a maksimum 1.

842. $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ vodi na neodređeni izraz oblika $\frac{0}{0}$. Tražimo

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{2\left(-\cos x+\cos\frac{\pi}{3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x\cdot 2\sin\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}}{2\cdot 2\sin\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2}\sin\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}}=\frac{1}{2}.$$

843. Kvadriraj prvu i drugu jednačinu, treću pomnoži sa -2 i zatim saberi sve tri jednačine. Rezultat eliminacije je $(a+b)^2=-\frac{1}{2}$.

844. Izraz se dovodi na oblik $\sin^8 x+\cos^8 x-2+4\sin^2 x\cos^2 x-$ $-2\sin^4 x\cos^4 x=(\cos^4 x-\sin^4 x)^2-2+\sin^2 2x=\cos^2 2x-2+\sin^2 2x=$ $=1-2=-1$.

845. Jednačina se dovodi na oblik $(1+2\cos x)(\sin x+\cos x)=0$; za $1+$ $+2\cos x=0$, $\cos x=-\frac{1}{2}$ i $\operatorname{tg} 2x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\pm\sqrt{3}$; za $\sin x+\cos x=0$ je $\operatorname{tg} x=-1$ pa $\operatorname{tg} 2x$ nije konačan.

846. Ako se $\sin 3x$ i $\sin 2x$ izraze pomoću funkcija ugla x, tada jednačina, na kraju, prima oblik $\sin x(4\cos^2 x+2\cos x-a-1)=0$. Odavde je $\sin x=0$ za $x=k\pi$, a iz jednačine $4\cos^2 x+2\cos x-$ $-a-1=0$ nalazimo $\cos x=\frac{-1\pm\sqrt{4a+5}}{4}$. Rješenja su realna za $a\geqslant-\frac{5}{4}$; uz to mora biti $\left|\frac{-1\pm\sqrt{4a+5}}{4}\right|\leqslant 1$. Ako je $\cos x=\frac{-1+\sqrt{4a+5}}{4}$, onda je $-3\leqslant\sqrt{4a+5}\leqslant 5$ tj. $a\leqslant 5$. Ako je

$\cos x = \frac{-1-\sqrt{4a+5}}{4}$, onda je $-4 \leqslant \sqrt{4a+5} \leqslant 3$ tj. a prema svemu imamo: prvo; ako je $a < -\frac{5}{4}$ ili $a > 5$, jednačina nema rješenja; drugo; ako je $-\frac{5}{4} \leqslant a \leqslant 1$, onda je $x_1 = k\pi$ i $x_2 = 2k\pi \pm \varphi$, $x_3 = 2k\pi \pm \psi$ gdje su φ i ψ uglovi za koje je kosinus jednak $\frac{-1+\sqrt{4a+5}}{4}$, odnosno $\frac{-1-\sqrt{4a+5}}{4}$;

treće; ako je $1 < a \leqslant 5$, onda je $x_1 = k\pi$ i $x_2 = 2k\pi \pm \varphi$.

847. Imamo: $\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$. Iz zadane jednačine je $\operatorname{tg}^2\alpha = a\operatorname{tg}\alpha - 1$, pa izlazi $\cos 2\alpha = -1 + \frac{2}{a\operatorname{tg}\alpha}$. Rješenja jednačine $\operatorname{tg}^2\alpha - a\operatorname{tg}\alpha + 1 = 0$ su $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a \pm \sqrt{a^2-4}}{2}$; odavde se vidi da treba da bude $|a| \geqslant 2$, a kako je $a > 0$, mora biti $a \geqslant 2$. Ako je $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, onda je $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$ tj. $\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{a^2-4}}{a}$; ako je $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, onda je $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$ a $\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{a^2-4}}{a}$; za $a = 2$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

848. Treba da bude diskriminanta jednaka ili veća od nule tj. $64\sin^2\alpha - 16 \geqslant 0$ ili $\sin^2\alpha \geqslant \frac{1}{4}$. Dakle $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant -\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2} \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$, a to je za $210° + k\cdot 360° \leqslant \alpha \leqslant 330° + k\,360°$ i $30° + k\cdot 360° \leqslant \alpha \leqslant 150° + k\,360°$.

849. **a)** Diskriminanta jednačine mora biti jednaka nuli tj. $(2\sin\alpha)^2 - 4\left(\sqrt{3}\sin\alpha - \frac{3}{4}\right) = 0$; odavde je $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ tj. $\alpha = 60°$ ili $120°$.

b) $\alpha = 60°$ i $\alpha = 300°$.

850. Prema obrascu $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$ jednačina prelazi u oblik $\cos(2x-\alpha) = 0$; odavde $x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} + k\pi$ odnosno $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\pi}{4}\right)$.

851. Ako u jednačinu uvrstimo $\sin\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, $\cos\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, dobijamo jednačinu $(2+\sqrt{7})\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-2+\sqrt{7}=0$ odakle je $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{7}-2>0{,}6$ i $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{7}-2}{3}<0{,}3$. Prema postavljenom uslovu je $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{8}$ i $0<\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}<\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$. Međutim, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2}-1<0{,}5$. Kako je $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}<0{,}5$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{7}-2$ ne dolazi u obzir, jer ne zadovoljava postavljeni uslov, pa je $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{7}-2}{3}$.

852. Iz zadane jednačine je $\cos x=\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}$. Ako u obrascu $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ zamijeni $\cos x$ gornjim izrazom, dobiće se $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$ tj. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\pm\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ što je i trebalo dokazati.

853. Data jednakost može se pisati u obliku $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ ili $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=0$; odavde je $\alpha=2k\pi$, $\beta=2m\pi$, $\alpha+\beta=2n\pi$ gdje su k, m i n bilo koji cijeli brojevi.

854. Prema postavljenom uslovu u zadatku treba da je svako x $\cos n(x+3\pi)\sin\frac{5}{n}(x+3\pi)=\cos nx\cdot\sin\frac{5}{n}x$. Taj identitet treba da postoji i za $x=0$ odakle zaključujemo da n mora zadovoljavati jednačinu $\sin\frac{15\pi}{n}=0$, a to je ispunjeno za $n=\pm1,\ \pm3,\ \pm5,\ \pm15$. Lako je sad dokazati da je za dobivene vrijednosti od n gore navedeni identitet zadovoljen za svako x.

855. Treba pretpostaviti da je $\cos x \neq 0$, $\sin x \neq 0$ i $\sin x \neq -1$ a to je za $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Za sve vrijednosti od x osim $x = k\frac{\pi}{2}$ y ima smisla i $y = \frac{\sin x\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)}{\cos x\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\frac{1+\cos x}{1+\sin x}$.

Budući da je $|\cos x| < 1$ i $|\sin x| < 1$, to je $y > 0$ što je i trebalo dokazati.

856. Imamo: $S = \sin^3 x \cos^5 x = (\sin x \cos x)^3 \cos^2 x = \frac{1}{16}\sin^3 2x(1 + \cos 2x) = \frac{1}{16}\sin^3 2x + \frac{1}{32}\sin^2 2x \sin 4x$; no $\sin^2 2x = \frac{1-\cos 4x}{2}$, pa je $S = \frac{1}{32}(1-\cos 4x)\sin 2x + \frac{1}{64}(1-\cos 4x)\sin 4x$. Ako se proizvod $\sin 2x \cos 4x$ napiše u obliku zbira, imamo $S = \frac{1}{32}\sin 2x - \frac{1}{32}\cdot\frac{\sin 6x - \sin 2x}{2} + \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{128}\sin 8x$ itd.

857. Vodeći računa o relacijama $\sin(k\pi - \varphi) = (-1)^{k+1}\sin\varphi$ i $\cos(k\pi - \psi) = (-1)^k \cos\psi$ lijevu stranu možemo pisati u obliku $2\sin k(\alpha + \beta)\cos k(\alpha - \beta) + 2\sin k\gamma \cos k\gamma = 2\sin k(\pi - \gamma)\cos k(\alpha - \beta) + 2\sin k\gamma \cos k[\pi - (\alpha + \beta)] = (-1)^{k+1}\sin k\gamma \cdot 2[\cos k(\alpha - \beta) - \cos k(\alpha + \beta)] = (-1)^{k+1}\sin k\alpha \sin k\beta \sin k\gamma$.

858. Svakako je $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - 2\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)}$

Prema poznatim formulama je $\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha = \frac{1}{2}[\sin\beta + \sin(2\alpha+\beta)]$ i $2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta) = \sin(2\alpha+\beta) - \sin\beta$; dakle je $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - 2\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{1}{2}[\sin\beta + \sin(2\alpha+\beta)] - \sin(2\alpha+\beta) + \sin\beta}{\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)} = \frac{3\sin\beta - \sin(2\alpha+\beta)}{2\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)}$.

Prema postavljenom uslovu brojilac (brojnik) je nula a iz toga slijedi $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 2\operatorname{tg}\alpha$.

859. Lijevu stranu možemo pisati u obliku $2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + 2\cos\frac{c+a+b+c}{2}\sin\frac{c-a-b-c}{2} = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - 2\cos\frac{2c+a+b}{2}\sin\frac{a+b}{2} = 2\sin\frac{a+b}{2}\left(\cos\frac{a+b}{2} - \cos\frac{a+b+2c}{2}\right)$ itd.

860. Pođi od identiteta u prethodnom zadatku i uzmi u obzir da je $\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$ itd.

861. Relacija se može pisati o obliku $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}=-\operatorname{tg}(\beta+\gamma)=\operatorname{tg}(-\beta-\gamma)$; dakle je $\alpha=k\pi-\beta-\gamma$ ili $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$. Iz jednačina $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$, $2\alpha=\beta+\gamma$, $\gamma=\alpha+\beta$ nalazimo $\alpha=\frac{2}{3}\gamma$, $\beta=\frac{1}{3}\gamma$, $\gamma=\frac{k\pi}{2}$. Najmanja vrijednost uglova dobiće se za $k=2$ (za $k=1$ ne postoji $\operatorname{tg}\gamma$); to su uglovi $\alpha=\frac{2}{3}\pi$, $\beta=\frac{1}{3}\pi$ i $\gamma=\pi$.

862. Pođi od relacije $\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}=\frac{\sin^2\frac{y}{2}}{\cos^2\frac{y}{2}}=\frac{1-\cos y}{1+\cos y}$. Iz datog uslova je $\cos y=\frac{\cos z}{\cos x}$, pa zamjenom u gornjem izrazu slijedi $\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}=$

$$=\frac{\cos x-\cos z}{\cos x+\cos z}=\frac{2\sin\frac{z+x}{2}\sin\frac{z-x}{2}}{2\cos\frac{z+x}{2}\cos\frac{z-x}{2}}=\operatorname{tg}\frac{z+x}{2}\operatorname{tg}\frac{z-x}{2}.$$

863. Izraz možemo pisati u obliku $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x}-\operatorname{tg}^2 2x-\frac{8\cos^2 4x}{\sin 4x}=$

$$=\frac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}-\frac{1-\cos 4x}{1+\cos 4x}-\frac{8\cos^2 4x}{\sin 4x}=\frac{(1+\cos 4x)^2-(1-\cos 4x)^2}{1-\cos^2 4x}-$$

$$-\frac{8\cos^2 4x}{\sin 4x}=\frac{4\cos 4x}{\sin^2 4x}-\frac{8\cos^2 4x}{\sin 4x}=\frac{8\cos 4x\sin^2\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2 4x}.$$

864. a) Imamo: $[\sin\alpha+\sin(\alpha+3\beta)]+[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)]=2\sin\left(\alpha+\right.$

$$\left.+\frac{3}{2}\beta\right)\cos\frac{3}{2}\beta+2\sin\left(\alpha+\frac{3}{2}\beta\right)\cos\frac{\beta}{2}=2\sin\left(\alpha+\frac{3}{2}\beta\right)\cos\left(\frac{3}{2}\beta+\right.$$

$$\left.+\cos\frac{\beta}{2}\right)=4\cos\beta\sin\left(\alpha+\frac{3}{2}\beta\right)\cos\frac{\beta}{2}.$$ **b)** Lijevu stranu dovodimo na oblik $2\cos\left(\alpha+\frac{3}{2}\beta\right)\sin\frac{3}{2}\beta+2\cos\left(\alpha+\frac{3}{2}\beta\right)\sin\frac{\beta}{2}$ itd.

865. **a)** Imamo: $[\cos\alpha+\cos(\alpha+3\beta)]+[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)]=$
$=2\cos\left(\alpha+\frac{3}{2}\beta\right)\cos\frac{3}{2}\beta+2\cos\left(\alpha+\frac{3}{2}\beta\right)\cos\frac{\beta}{2}=2\cos\left(\alpha+\right.$
$\left.+\frac{3}{2}\beta\right)\left[\cos\frac{3}{2}\beta+\cos\frac{\beta}{2}\right]=2\cos\left(\alpha+\frac{3}{2}\beta\right)2\cos\beta\cos\frac{\beta}{2}$ itd. Ovaj zadatak slijedi iz prethodnog zadatka a) pomoću $\frac{\pi}{2}+\alpha$ umjesto α.

866. **a)** Lijevu stranu možemo pisati u obliku $\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}\left\{\sin\alpha\sin\frac{\beta}{2}+\right.$
$\left.+\sin(\alpha+\beta)\sin\frac{\beta}{2}+\sin(\alpha+2\beta)\sin\frac{\beta}{2}+\cdots+\sin(\alpha+7\beta)\sin\frac{\beta}{2}\right\}=$
$=\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}\left\{\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\right]+\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)-\right.\right.$
$\left.\cos\left(\alpha+\frac{3}{2}\beta\right)\right]+\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{5\beta}{2}\right)\right]+\cdots+$
$\left.+\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\frac{13}{2}\beta\right)-\cos\left(\alpha+\frac{15}{2}\beta\right)\right]\right\}=-\frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}\cdot 2\sin\left(\alpha+\right.$
$\left.+\frac{7}{2}\beta\right)\sin(-4\beta)$ itd. **c)** Postupi slično kao i u zadatku a); lijeva strana prima oblik $\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}\left\{\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\right.\right.\right.$
$\left.\left.\left.+\frac{\beta}{2}\right)\right]+\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{3}{2}\beta\right)\right]+\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\frac{3}{2}\beta\right)-\right.\right.$
$\left.-\cos\left(\alpha+\frac{5}{2}\beta\right)\right]+\cdots+\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\frac{2n-1}{2}\beta\right)-\cos\left(\alpha+\right.\right.$
$\left.\left.+\frac{2n+1}{2}\beta\right)\right]\Big\}=-\frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}\cdot 2\sin\left(\alpha+\frac{n}{2}\beta\right)\cdot\sin\left(-\frac{n+1}{2}\beta\right)=$
$=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{n}{2}\beta\right)\sin\frac{n+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}$. **d)** Za $n=1$ formula c) očito vrijedi; pretpostavimo da ona vrijedi za neki prirodni broj n. Ostaje da se dokaže da vrijedi i za $n+1$ tj. da je

$S_{n+1} = S_n + \sin[\alpha + (n+1)\beta] = \dfrac{\sin\left(\alpha + \dfrac{n-1}{2}\beta\right)\sin\dfrac{n+2}{2}\beta}{\sin\dfrac{\beta}{2}}$. Zaista je

$$S_{n+1} = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{n}{2}\beta\right)\sin\frac{n+1}{2}\beta + \sin[\alpha + (n+1)\beta]\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}\left\{\cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - \cos\left[\alpha + \left(n + \frac{1}{2}\right)\beta\right] + \cos\left[\alpha + \left(n + \frac{1}{2}\right)\beta\right] -\right.$$

$$\left. - \cos\left[\alpha + \left(n + \frac{3}{2}\right)\beta\right]\right\} = \frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}\cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - \cos\left[\alpha + \left(n + \frac{3}{2}\right)\beta\right] =$$

$$= -\frac{\sin\left(\alpha + \frac{n+1}{2}\beta\right)\sin\left(-\frac{n+2}{2}\beta\right)}{\sin\frac{\beta}{2}} \text{ itd.}$$

867. **a)** Lijeva strana prelazi u oblik $\dfrac{1}{\sin\dfrac{\beta}{2}}\left[\cos\alpha\sin\dfrac{\beta}{2} + \cos(\alpha + \right.$

$$\left. + \beta)\sin\frac{\beta}{2} + \cos(\alpha + 2\beta)\sin\frac{\beta}{2} + \cdots + \cos(\alpha + 7\beta)\sin\frac{\beta}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}\left\{\frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha + \frac{3\beta}{2}\right) -\right.\right.$$

$$- \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) + \frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha + \frac{5}{2}\beta\right) - \sin\left(\alpha + \frac{3}{2}\beta\right)\right] + \cdots +$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha + \frac{15}{2}\beta\right) - \sin\left(\alpha + \frac{13}{2}\beta\right)\right]\right\} = \frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}\left[\sin\left(\alpha + \frac{15}{2}\beta\right) -\right.$$

$$\left. - \sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)\right] = \frac{\cos\left(\alpha + \frac{7}{2}\beta\right)\sin 4\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

b) i **c)** Postupi potpuno na isti način kao u zadatku a) **d)** Treba dokazati da je

$S_{n+1} = S_n + \cos[\alpha + (n+1)\beta] = \dfrac{\cos\left(\alpha + \dfrac{n+1}{2}\beta\right)\sin\dfrac{n+2}{2}\beta}{\sin\dfrac{\beta}{2}}$; zaista je

$$S_{n+1}=\frac{\cos\left(\alpha+\frac{n}{2}\beta\right)\sin\frac{n+1}{2}\beta+\cos\left[\alpha+(n+1)\beta\right]\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}\left\{\sin\left[\alpha+\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta-\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left[\alpha+\left(n+\frac{3}{2}\right)\beta-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sin\left[\alpha+\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta\right]\right\}=\frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}\left[2\cos\left(\alpha+\frac{n+1}{2}\beta\right)\sin\frac{n+2}{2}\beta\right]\right.\text{ itd.}$$

868. **a)** Lijevu stranu pišemo u obliku $\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left[\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+\right.$

$\left.+\sin 2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+\sin 3\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+\cdots+\sin 5\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\right]$. Ako na svaki član unutar zagrade primijenimo obrazac $\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-\right.$ $\left.-y)-\cos(x+y)\right]$, izlazi, poslije redukcije, $\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\right.$

$\left.-\cos\frac{11}{2}\alpha\right)=\frac{\sin\frac{5}{2}\alpha\sin 3\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

869. **a)** Lijevu stranu piši u obliku $\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha+\right.$

$\left.+\sin\frac{\alpha}{2}\cos 3\alpha+\cdots+\sin\frac{\alpha}{2}\cos 5\alpha\right)$ pa primijeni obrazac $\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right]$. **b)** Postupi na sličan način kao i u zadatku a). **c)** Lijevu stranu uzimamo u obliku $S_n=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}\cos 3\alpha+\cdots+\right.$

$\left.+\sin\frac{\alpha}{2}\cos n\alpha\right)$. Ako na svaki član unutar zagrade primijenimo obrazac za pretvaranje monoma $\sin x\cos y$ u binom, pa iza toga

izvršimo redukciju, preostaće $S_n = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{2n+1}{2}\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}\right) =$

$= \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot 2\cos\frac{n+1}{2}\alpha \sin\frac{n}{2}\alpha$ itd. **d)** Postupi na sličan način kao što smo radili u zadatku 867 d.

870. **a)** Imamo: $\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha + \cdots + \right.$

$\left. + \sin\frac{\alpha}{2}\cos 6\alpha\right) = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{13}{2}\alpha\right) =$

$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot 2\sin\frac{\frac{13}{2}\alpha + \frac{\alpha}{2}}{2}\cos\frac{\frac{13}{2}\alpha - \frac{\alpha}{2}}{2}$ itd. **b)** Postupi na isti način kao i u prethodnom zadatku.

871. **a)** Imamo: $\frac{1}{\sin\alpha}(\sin^2\alpha + \sin\alpha\sin 3\alpha + \sin\alpha\sin 5\alpha + \cdots +$

$+ \sin\alpha\sin 9\alpha) = \frac{1}{\sin\alpha}\left[\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) + \frac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos 4\alpha) + \right.$

$\left. + \frac{1}{2}(\cos 4\alpha - \cos 6\alpha) + \cdots + \frac{1}{2}(\cos 8\alpha - \cos 10\alpha)\right] = \frac{1}{2\sin\alpha}(1 -$

$- \cos 10\alpha) = \frac{2\sin^2 5\alpha}{2\sin\alpha}$ itd.

b) Postupi na isti način kao i u prethodnom zadatku.

872. **a)** Imamo: $\frac{1}{\sin\alpha}(\sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos 3\alpha + \sin\alpha\cos 5\alpha + \cdots +$

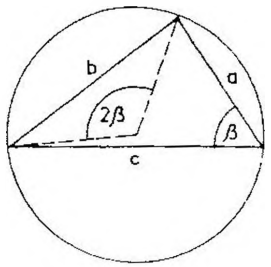
$+ \sin\alpha\cos 9\alpha) = \frac{1}{\sin\alpha}\left[\frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{2}(\sin 4\alpha - \sin 2\alpha) + \frac{1}{2}(\sin 6\alpha - \right.$

$\left. - \sin 4\alpha) + \cdots + \frac{1}{2}(\sin 10\alpha - \sin 8\alpha)\right] = \frac{1}{\sin\alpha} \cdot \frac{1}{2}\sin 10\alpha$ itd.

b) Postupi na isti način kao i u prethodnom zadatku.

873. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 6k$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = 10k$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 15k$. Pomoću relacije iz zadatka 386. nalazimo $k = \frac{\sqrt{3}}{30}$; tako je $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{5}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{14}$, $\sin\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\gamma = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}$ pa je $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = 5:7:8$. Stoga je $a:b:c = 5:7:8$ i $a = 5k_1$, $b = 7k_1$, $c = 8k_1$. Zamjenom u obrascu $R = \dfrac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$ dobijamo $k_1 = 3$, pa je $a = 15$, $b = 21$, $c = 24$; $\cos\beta = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \dfrac{1}{2}$, $\beta = 60°$. Traženi ugao je $2\beta = 120°$. (sl. 92)



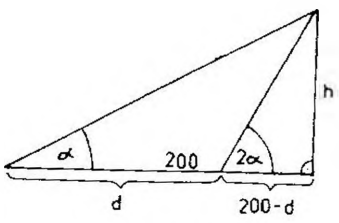
Sl. 92

874. Pomoću obrasca $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$ dobićemo $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2} = 1$, pa je $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$. Iz ove jednačine u sistemu sa jednačinom $\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{3}$ dobijamo $\alpha = \dfrac{5\pi}{12}$ i $\beta = \dfrac{\pi}{12}$. Stranicu c naći ćeš iz jednačine $c^2 = a^2 + b^2 = 8$ te je $c = 2\sqrt{2}$.

875. Neka je $2a$ rastojanje tačaka M i N, S središte a r poluprečnik (polumjer) kružnice. Označimo li ugao MSP sa φ, tada je $\overline{MP}^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\varphi$ i $\overline{NP}^2 = a^2 - r^2 - 2ar\cos\varphi$; sabiranjem ovih jednačina slijedi odmah tražena relacija.

876. Iz jednačina $r:R = 1:2$ i $(r-R)^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 - 2\overline{AM}\cdot\overline{AN}\cos 30°$ $= 441$ dobijamo $r = 7$ i $R = 14$.

877. Imamo: $200\operatorname{tg}\alpha = (200-d)\operatorname{tg}2\alpha$, pa je $d = 100(1+\operatorname{tg}^2\alpha) = \dfrac{100}{\cos^2\alpha}$. (sl. 93)

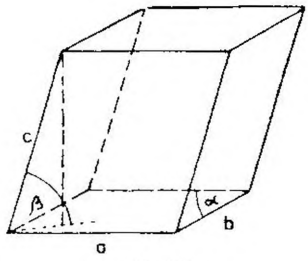


Sl. 93

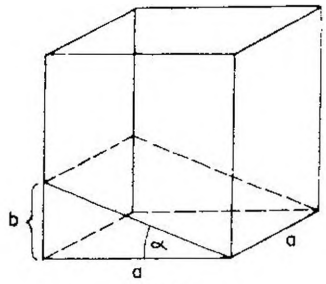
878. Ako je h visina stuba, onda je $h = 25\operatorname{tg}\alpha$ i $h = 8\operatorname{tg}2\alpha$ te je $8\operatorname{tg}2\alpha = 25\operatorname{tg}\alpha$; odavde je $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{5}$ a $h = 15$ m.

879. Baza prizme $B = 36$, visina $h = d\sin\alpha = 10$, poluprečnik (polumjer) baze cilindra $r = 2$, zapremina (volumen) $V = 40\pi$.

880. $V = abc \sin\alpha \sin\beta$. (sl. 94)



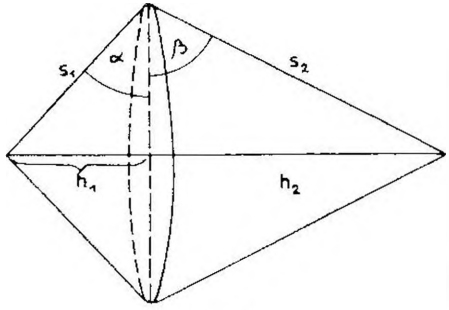
Sl. 94



Sl. 95

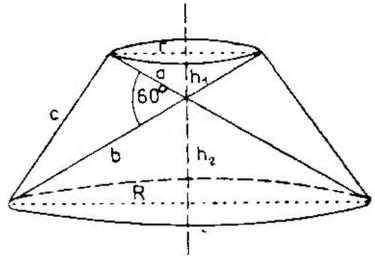
881. $V_1 = \frac{a^3 \operatorname{tg}\alpha}{2}$, $V_2 = a^3 - \frac{a^3 \operatorname{tg}\alpha}{2}$. Iz relacije $V_2 = n V_1$ dobićemo $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{n-1}$. (sl.95)

882. Za izračunavanje površine potrebno je poznavati osim polupreč nika još i izvodnice s_1 i s_2 obiju kupa, a za zapreminu i visine h_1 i h_2 (sl. 96). Imamo $h_1 : h_2 = 1 : 3$, $\alpha : \beta = 1 : 2$, $\alpha = 2\beta$, $h_1 = 3\operatorname{tg}\alpha$, $h_2 = 3\operatorname{tg} 2\alpha$. Iz jednačine $\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg} 2\alpha = 1 : 3$ dobićemo $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, pa je $\alpha = 30°$, $h_1 = \sqrt{3}$, $h_2 = 3\sqrt{3}$, $s_1 = 2\sqrt{3}$, $s_2 = 6$, $P = 3\pi(s_1 + s_2) = 6\pi(3 + \sqrt{3})$, $V = \frac{9\pi}{3}(h_1 + h_2) = 12\pi\sqrt{3}$.



Sl. 96

883. Treću stranicu trougla dobićemo iz obrasca $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, i to $b = 8$ (sl. 97). Srednja stranica je $c = 7$, njezin suprotni ugao $\gamma = 60°$ a pripadni vanjski ugao iznosi 120°. Njegova simetrala je osa rotacije. Ona sa stranicama a i b zatvara uglove od 60°. Poluprečnici baza nastale zarubljene kupe su $R = b\sin 60° = 4\sqrt{3}$ i $r = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Tražena površina je $P = r\pi a + R\pi b + \pi c(R + r) = 75\pi\sqrt{3}$, a zapremina $V = \frac{(h_1 + h_2)\pi}{3}(R^2 +$



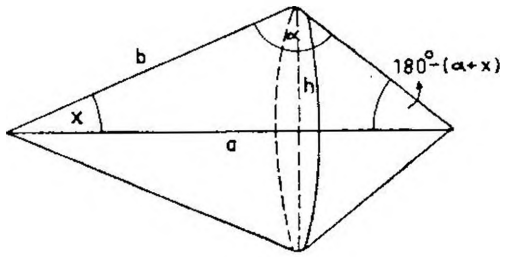
Sl. 97

$+Rr+r^2)-\frac{r^2\pi h_1}{3}-\frac{R^2\pi h_2}{3}=\frac{\pi}{3}(R+r)(Rh_1+rh_2)$ gdje je $h_1=$

$=a\cos 60^\circ=\frac{3}{2}$, $h_2=b\cos 60^\circ=4$; $V=66\pi$.

884. Ako je drugi ugao x, treći je $180^\circ-(\alpha+x)$ (sl. 98). Zapremina $V=\frac{h^2\pi a}{3}$ gdje je h visina trougla; $h=b\sin x$; $a:b=\sin\alpha:\sin[180^\circ-(\alpha+x)]$, $b=\frac{a\sin(\alpha+x)}{\sin\alpha}$,

$h=\frac{a\sin x\sin(\alpha+x)}{\sin\alpha}$;



Sl. 98

$V=\frac{a^3\pi}{3\sin^2\alpha}\cdot\sin^2 x\sin^2(\alpha+x)$. Treba odrediti ugao x za koji će $\sin^2 x\sin^2(\alpha+x)$ postati maksimalan. Imamo: $\sin^2 x\sin^2(\alpha+x)=$ $=\frac{1}{4}[\cos\alpha-\cos(\alpha+2x)]^2$. Da bi taj izraz bio maksimalan, mora biti $\cos(\alpha+2x)$ minimalan, a to je za $\alpha+2x=180^\circ$, odakle je $x=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$. Trougao je jednakokraki (istokračan).

885. Imamo: $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ=\frac{1}{2}(\cos 20^\circ-\cos 60^\circ)\sin 80^\circ=$

$=\frac{1}{2}\left(\cos 20^\circ\sin 80^\circ-\frac{1}{2}\sin 80^\circ\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 100^\circ+\sin 60^\circ}{2}-\right.$

$\left.-\frac{1}{2}\sin 80^\circ\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 80^\circ}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sin 80^\circ}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{8}$ (1);

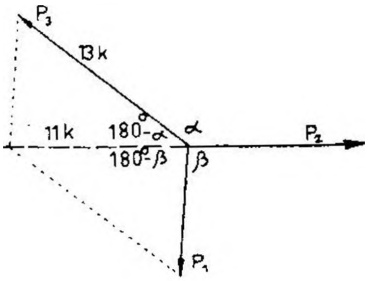
$\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\frac{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ}=$

$=\frac{\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ}=\frac{\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{4\sin 20^\circ}=\frac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ}=\frac{\sin 20^\circ}{8\sin 20^\circ}=$

$=\frac{1}{8}$ (2). Iz relacija (1) i (2) neposredno slijedi

$\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\operatorname{tg}80^\circ=\sqrt{3}$.

886. Imamo: $P_1 = 8k$, $P_2 = 11k$, $P_3 = 13k$. Označimo li sa α ugao između vektora P_2 i P_3 (sl. 99), a sa β ugao između P_2 i P_1, tako da je $\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{P_2^2 + P_3^2 - P_1^2}{2P_2P_3} = \frac{113}{143}$ a odavde $\alpha = 142^\circ 12'$; $\cos(180^\circ - \beta) = \frac{P_1^2 + P_2^2 - P_3^2}{2P_1P_2} = \frac{1}{11}$, $\beta = 95^\circ 13'$.



Sl. 99

887. Na osnovu sinusove teoreme je $\frac{a\sin\xi}{\sin\alpha} = \frac{b\sin\eta}{\sin\beta}$ odnosno $\frac{\sin\xi}{\sin\eta} = \frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta}$ (1); $\xi + \eta = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)$ (2). Treba riješiti sistem jednačina (1) i (2). Označimo, zbog kratkoće, $\frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta} = k$; tada je $\sin\eta = \frac{1}{k}\sin\xi$, pa imamo $\frac{\sin\xi - \sin\eta}{\sin\xi + \sin\eta} = \frac{k-1}{k+1}$. Imamo: $\frac{\sin\xi - \sin\eta}{\sin\xi + \sin\eta} = \frac{2\cos\frac{\xi+\eta}{2}\sin\frac{\xi-\eta}{2}}{2\sin\frac{\xi+\eta}{2}\cos\frac{\xi-\eta}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{\xi+\eta}{2}\operatorname{tg}\frac{\xi-\eta}{2}$; tako dolazimo do jednačine $\operatorname{tg}\frac{\xi-\eta}{2} = \frac{k-1}{k+1}\operatorname{tg}\frac{\xi+\eta}{2}$. Odavde se može naći $\xi - \eta$; ova jednačina zajedno sa jednačinom (2) daje uglove ξ i η. Rastojanja x, y i z možemo naći pomoću sinusove teoreme.

Trigonometrijski obrasci (formule)

I. VEZE IZMEĐU TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Odnosi između funkcija istog ugla (kuta)

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=1 \qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\operatorname{tg}^2\alpha \qquad \frac{1}{\sin^2\alpha}=1+\operatorname{ctg}^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} \qquad \sin^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Traži se \ Zadano	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$\sin x$		$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\frac{\operatorname{tg} x}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}$
$\cos x$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$		$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$	$\frac{\operatorname{ctg} x}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{\sin x}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$		$\frac{1}{\operatorname{ctg} x}$
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} x}$	

Svođenje trigonometrijskih funkcija proizvoljnog ugla na funkcije oštrog (šiljastog) ugla

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha \qquad \cos(-\alpha)=\cos\alpha \qquad \operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\left.\begin{aligned}&\sin(\alpha + k\cdot 360°) = \sin\alpha\\&\cos(\alpha + k\cdot 360°) = \cos\alpha\\&\operatorname{tg}(\alpha + k\cdot 180°) = \operatorname{tg}\alpha\\&\operatorname{ctg}(\alpha + k\cdot 180°) = \operatorname{ctg}\alpha\end{aligned}\right\}\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$$\sin(90° \pm \alpha) = \cos\alpha \qquad \operatorname{tg}(90° \pm \alpha) = \mp\operatorname{ctg}\alpha$$
$$\cos(90° \pm \alpha) = \mp\sin\alpha \qquad \operatorname{ctg}(90° \pm \alpha) = \mp\operatorname{tg}\alpha$$

$$\sin(180° \pm \alpha) = \mp\sin\alpha \qquad \operatorname{tg}(180° \pm \alpha) = \pm\operatorname{tg}\alpha$$
$$\cos(180° \pm \alpha) = -\cos\alpha \qquad \operatorname{ctg}(180° \pm \alpha) = \pm\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha \qquad \operatorname{tg}(360° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$
$$\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha \qquad \operatorname{ctg}(360° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

Adiciona teorema

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Obrasci za dvostruke uglove, trostruke uglove i poluuglove

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \qquad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Izražavanje trigonometrijskog binoma u obliku monoma

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\cos(45^\circ-\alpha) \qquad \cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\sin(45^\circ-\alpha)$$

$$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \qquad \operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2} \qquad 1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1+\sin\alpha=2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right) \qquad 1-\sin\alpha=2\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$$

Izražavanje trigonometrijskih monoma u obliku binoma

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$

II. VEZE IZMEĐU ELEMENATA TROUGLA (TROKUTA)

Sinusova teorema

$$a:b:c=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma \qquad \frac{a}{\sin\alpha}:\frac{b}{\sin\beta}:\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

Kosinusova teorema

$$a^2=b^2-c^2-2bc\cos\alpha \qquad b^2=c^2+a^2-2ca\cos\beta \qquad c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

Teorema o tangensima

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Molvajdovi obrasci

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \qquad \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Obrasci za izračunavanje uglova trougla (heronovske formule)

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\frac{r}{s-a} \quad \text{gdje je } s=\frac{a+b+c}{2}$$

Obrasci za površinu trougla

$$P=\frac{ab\sin\gamma}{2} \qquad \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$$

$$P=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \qquad P=r^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

Relacije za poluprečnik (polumjer) opisane i upisane kružnice, za poluprečnik spoljašnje dodirne kružnice, simetralu ugla i težišnu liniju (težišnicu) trougla

$$R=\frac{a}{2\sin\alpha}=\frac{abc}{4P}=\frac{s}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$r=\frac{P}{s}=(s-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{a\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$r_a=\frac{P}{s-a}=s\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=(s-c)\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=(s-b)\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

$$s_c=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}=\frac{h_c}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

$$4t_c^2=2(a^2+b^2)-c^2=c^2+8P\operatorname{ctg}\gamma$$

LITERATURA

Лидский, Овсянников: Задачи по элементарной математике

Антонов, Выгодский: Сборник задач по элементарной математике

Берман т, Люстерник: Тригонометрия

Моденов: Сборник задач по специальному курсу элементарной математики

Vondrašek: Sbirka uloh z matematiky pro lesnicke školy

Wallentin: Maturitätsfragen aus der Mathematik

Mandl: Übungsaufgaben

Gajdeczka — Kaller: Übungsbuch zur Geometrie

Müsebeck: Aufgaben für den Unterricht in der Goniometrie und ebenen Trigonometrie

S A D R Ž A J

Strana

Predgovor .....

1. Trigonometrijske funkcije oštrog ugla (šiljastog kuta). Njihove veze. Prirodne vrijednosti 1
   R j e š e n j a 11
2. Rješavanje pravouglog trougla (pravokutnog trokuta) pomoću prirodnih vrijednosti trigonometrijskih funkcija 1
   R j e š e n j a 12
3. Opšta definicija trigonometrijskog ugla (kuta). Trigonometrijske funkcije bilo kojeg ugla. Redukcija na prvi kvadrant. Grafici trigonometrijskih funkcija 1
   R j e š e n j a 12
4. Adiciona teorema. (Trigonometrijske funkcije binoma) 2
   R j e š e n j a 14
5. Trigonometrijske funkcije udvojenog ugla (kuta) 3
   R j e š e n j a 15
6. Trigonometrijske funkcije poluuglova (polukutova) 4
   R j e š e n j a 15
7. Transformacija proizvoda (umnoška, produkta) trigonometrijskih funkcija u zbir (sumu) ili razliku (diferenciju) 4
   R j e š e n j a 16
8. Transformacija trigonometrijskih izraza za logaritmovanje 4
   R j e š e n j a 16
9. Logaritmi trigonometrijskih funkcija 5
   R j e š e n j a 17
10. Trigonometrijske jednačine (jednadžbe) s jednom nepoznatom 5
   R j e š e n j a 17
11. Trigonometrijske jednačine (jednadžbe) sa dvije nepoznate 7
   R j e š e n j a 20
12. Trigonometrijske nejednačine (nejednadžbe) 7
   R j e š e n j a 21

Strana

13. Rješavanje pravouglog trougla (pravokutnog trokuta) pomoću logaritama 76
Rješenja 224
14. Rješavanje kosouglog trougla (kosokutnog trokuta) 82
Rješenja 232
15. Primjena trigonometrije 93
Rješenja 251
16. Mješoviti zadaci za ponavljanje trigonometrije 100
Rješenja 259
Trigonometrijski obrasci (formule) 277
Literatura 281

S A D R Ž A J

Strana

Predgovor 3

1. Trigonometrijske funkcije oštrog ugla (šiljastog kuta). Njihove veze. Prirodne vrijednosti 9
   R j e š e n j a 113
2. Rješavanje pravouglog trougla (pravokutnog trokuta) pomoću prirodnih vrijednosti trigonometrijskih funkcija 16
   R j e š e n j a 120
3. Opšta definicija trigonometrijskog ugla (kuta). Trigonometrijske funkcije bilo kojeg ugla. Redukcija na prvi kvadrant. Grafici trigonometrijskih funkcija 19
   R j e š e n j a 124
4. Adiciona teorema. (Trigonometrijske funkcije binoma) 28
   R j e š e n j a 142
5. Trigonometrijske funkcije udvojenog ugla (kuta) 36
   R j e š e n j a 150
6. Trigonometrijske funkcije poluuglova (polukutova) 44
   R j e š e n j a 159
7. Transformacija proizvoda (umnoška, produkta) trigonometrijskih funkcija u zbir (sumu) ili razliku (diferenciju) 46
   R j e š e n j a 162
8. Transformacija trigonometrijskih izraza za logaritmovanje 48
   R j e š e n j a 164
9. Logaritmi trigonometrijskih funkcija 57
   R j e š e n j a 175
10. Trigonometrijske jednačine (jednadžbe) s jednom nepoznatom 59
    R j e š e n j a 177
11. Trigonometrijske jednačine (jednadžbe) sa dvije nepoznate 70
    R j e š e n j a 203
12. Trigonometrijske nejednačine (nejednadžbe) 73
    R j e š e n j a 216